DİFERANSİYEL DENKLEMLER

Konu Anlatımı
Çözümlü Örnekler
Alıştırmalar
Bilgisayar Uygulamaları

Hasan KORKMAZ
İzmir Fen Lisesi Matematik Öğretmeni

İzmir-2009

İÇİNDEKİLER

Hasan KORKMAZ
İzmir Fen Lisesi Matematik Öğretmeni

Diferansiyel Denklem, Mertebe ve Derecesi:
x değişkeni, y nin bir fonksiyonu, y=f(x) olmak üzere;
$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$ bağıntısına " **n. mertebeden diferansiyel denklem**" , denklemde en yüksek mertebeden tüevin üssüne de "**diferansiyel denklemin derecesi**" denir.

Örnekler:
$x^2 y-y'x=0$ ... 1. mertebe ve 1. dereceden,

$xy'+y'-e^x y''=0$ ... 2. mertebe ve 1. derecedenden,

$(y'')^2 = (1+y')^3$ 2. mertebe ve 2. derecedenden,

$y''+x(y')^3=(y''')^2 -yy'$ 3. mertebe ve 2. derecedenden

diferansiyel denklemlerdir.

Diferansiyel Denklemlerin Çözümleri

Bir diferansiyel denklemde yerine konduğunda, denklemi sağlayan bağıntılara diferansiyel denklemin bir **çözümü** denir.

Bir diferansiyel denklemi sağlayan farklı biçimlerde bağıntı veya fonksiyonlardan her birine **özel çözüm**, özel çözümlerden oluşan en kapsamlı çözüme de **genel çözüm,** diferansiyel denklemi etkilemeyen sabit değerlere de **integral sabitleri** denir.

Not1:
Bir diferansiyel denklemin genel çözümünde bulunan integral sabitlerinin sayısı, denklemin mertebesi kadardır.

Örneğin 1. mertebeden bir denklemde 1 tane integral sabiti, 2. mertebeden bir denklemde 2 tane integral sabiti... bulunur.

Not2:
İntegral sabitleri, a,b,c...gibi harflerle gösterilebileceği gibi, n. mertebeden bir diferansiyel denklemin genel çözümündeki sabitler $C_1, C_2, ..., C_n$ biçiminde de gösterilebilir.

Örnek:
y''+y=0 diferansiyel denklemini alalım.

a) y = sin x bir özel çözüm müdür?
b) y=2009 sin x bir özel çözüm müdür?
c) y=cos x bir özel çözüm müdür?
d) y=1453 cos x bir özel çözüm müdür?
e) y=a sin x bir özel çözüm müdür?
f) y=b cos x bir özel çözüm müdür?
g) y=a sinx + b cos x genel çözüm müdür?
h) x=0 için y=5 ve x=π/3 için $y'=\sqrt{3}$ değerini alan özel çözümü bulalım.

Çözüm:
a) y=sin x in özel çözüm olup olmadığını araştıralım.
$y=\sin x \Rightarrow y' = \cos x \Rightarrow y''= -\sin x$
y''+y=sin x+ (-sin x) = 0 olduğundan y=sin x bir özel çözümdür.

Aynı şekilde b) c) d) e) ve f) şıklarının, diferansiyel denklemi sağlayan özel çözümler olduğu görülebilir.

g) $y=a \sin x + b \cos x \Rightarrow y'=a \cos x-b \sin x$
$\Rightarrow y'' = -a \sin x -b \cos x$

$y''+y = -a \sin x -b \cos x + a \sin x + b \cos x = 0$
olup, gerçekten y=a sin x + b cos x fonksiyonu y''+y=0 diferansiyel denkleminin genel çözümüdür.

h) x=0 için $y=a \sin 0 +b \cos 0 = 5 \Rightarrow b = 5$

x=π/3 için $y' = a \cos \pi/3 - b \sin \pi/3 = \sqrt{3} \Rightarrow a=7\sqrt{3}$ bulunur.

Buna göre istenen özel çözüm;

$\boxed{y = 7\sqrt{3}\sin x + 5 \cos x}$ bulunur.

Alıştırmalar:

Aşağıdaki çözümlerin ait oldukları diferansiyel denklemleri sağladıklarını gösteriniz.

	Diferansiyel Denklem	**Çözümü**
1.	$y'' + \frac{2}{x} = \frac{y'}{x}$	$y= C_1+2x+ C_2 x^2$
2.	$y'''+2y''-y' = 2y$	$y= C_1e^x+ C_2e^{-x}+ C_3e^{-3x}$
3.	$\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 -4xy\frac{dy}{dx} + 8y^2 = 0$	$y = C(x - C)^2$
4.	$\frac{dy}{dx} + xy =x^3y^3$	$(Ce^{x^2} +x^2 +1)y^2 =1$
5.	$y''+9y = 3\cos 3x$	$y = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x + 1/2\, x \sin 3x$

Hasan KORKMAZ
İzmir Fen Lisesi Matematik Öğretmeni

Diferansiyel Denklemler

1. Mertebeden Diferansiyel Denklemler

a) Değişkenleri Ayrılmış Diferansiyel Denklemler

$y'f(y)=g(x)$ biçimindeki denklemlerdir. Bu tür denklemleri çözmek için $y'=\frac{dy}{dx}$ koyarak $\frac{dy}{dx}f(y)=g(x) \Rightarrow dyf(y)=g(x)dx$ $\Rightarrow \int dyf(y) = \int g(x)dx + C$ biçiminde bulunur.

Örnek:
$yy'= -x$ Diferansiyel denklemini çözelim.

Çözüm:
$y'=\frac{dy}{dx}$ koyalım. $y\frac{dy}{dx} = -x \Rightarrow \int ydy = \int -xdx$

$\Rightarrow \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C \quad \Rightarrow \quad \boxed{x^2 + y^2 = 2C}$ bulnur.

Not1: Bu eğriler ($2C=R^2>0$) merkezi orijin olan çember ailesidir.

Not2: 2C yerine C yazabiliriz (yani $2C \to C$ koyabiliriz)

Böylece çözüm; $\boxed{x^2 + y^2 = C}$ bulunur.

Örnek:
$yy'=p$ (p sabit) Diferansiyel denklemini çözelim.

Çözüm:

$y\frac{dy}{dx} = p \Rightarrow \int ydy = \int pdx \Rightarrow \frac{y^2}{2} = px + C$

$y^2 = 2px + 2C$

Çözümde $2C \to C$ koyarak,

$\Rightarrow \boxed{y^2 = 2px + C}$ bulunur.

Örnek:

$y'(y+1) = xe^x$ Diferansiyel denklemini çözelim.

Çözüm:
$dy(y+1) = xe^x\,dx \Rightarrow \int (y+1)dy = \int xe^x\,dx$

$\Rightarrow \frac{y^2}{2} + y = xe^x - e^x + C \Rightarrow \boxed{y^2 + 2y = 2e^x(x-1) + C}$

Alıştırmalar:

1. $(2+y)dx-(3-x)dy=0$

C: $(2+y)(3-x)=C$

2. $xydx-(1+x^2)dy=0$

C: $Cy^2 = 1+x^2$

3. $\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{(1+x^2)xy}$

C: $(1+x^2)(1+y^2) = Cx^2$

4. $a(x\frac{dy}{dx} + 2y) = xy\frac{dy}{dx}$

C: $x^2 y = C e^{\frac{y}{a}}$

5. $x(x+3)dy-y(2x+3)dx=0$
C: $y=Cx(x+3)$

6. $\sqrt{1+x^2}\,dy - \sqrt{1-y^2}\,dx=0$

C: $\arcsin y = \ln C(x + \sqrt{1+x^2})$

7. $dy+y\tan x\,dx = 0$
C: $y = C\cos x$

8. $(1-x)dy = y^2\,dx$
C: $y\ln C(1-x) = 1$

b) Homojen Diferansiyel Denklemler

$y'=g(\frac{y}{x})$ biçiminde (yani y' $\frac{y}{x}$ in bir fonksiyonu) olan denklemlere denir. Bu tür denklemleri çözmek için $\frac{y}{x}=u \Rightarrow y=ux$; $y'=u+xu' \Rightarrow u+xu' = g(u)$ Burada;
$u'=\frac{du}{dx}$ denip $x\frac{du}{dx} = g(u)-u \Rightarrow \frac{du}{g(u)-u} = \frac{dx}{x}$
Böylece baştaki denklem değişkenleri ayrılmış bir denkleme dönüşmüştür.

Örnek:
$y'=\frac{x+y}{x-y}$ Diferansiyel denklemini çözelim.

Hasan KORKMAZ
İzmir Fen Lisesi Matematik Öğretmeni

Çözüm:

$y'=\dfrac{x+y}{x-y} \Rightarrow y'=\dfrac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}} \Rightarrow y'=g(\frac{y}{x})$ homojen diferansiyel denklem olduğu görülür.

$\frac{y}{x}=u \Rightarrow y=ux$ koyarak $y'=u+x\frac{du}{dx}=\frac{1+u}{1-u} \Rightarrow x\frac{du}{dx}=\frac{1+u}{1-u}-u$

$$\Rightarrow \frac{xdu}{dx}=\frac{1+u^2}{1-u} \Rightarrow \frac{(1-u)du}{1+u^2}=\frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{du}{1+u^2}-\frac{udu}{1+u^2}=\frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \arctan(u)-\frac{\ln(1+u^2)}{2}=\ln(x)+C$$

$$\Rightarrow \arctan(\frac{y}{x})=\ln(\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}})+\ln(x)+\ln(C)$$

$$\Rightarrow \arctan(\frac{y}{x})=\ln(x\sqrt{\frac{x^2+y^2}{x^2}})+\ln(C)$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2+y^2}=C\,e^{\arctan(\frac{y}{x})}$$ bulunur.

Alıştırmalar:

1. $(x+2y)dx+(2x-3y)dy=0$
C: $x^2+4xy-3y^2=C$

2. $(3x+5y)dx+(4x+6y)dy=0$
C: $(x+y)^2(x+2y)=C$

3. $2(x+y)dx+ydy=0$
C: $\frac{1}{2}\ln(2x^2+2xy+y^2)-\arctan(\frac{x+y}{x})=C$

4. $(8y+10x)dx+(5y+7x)dy=0$
C: $(x+y)^2(2x+y)^3=C$

5. $(2x+y)dx+(x+3y)dy=0$
C: $2x^2+2xy+3y^2=C$

6. $\sqrt{1-4t^2}\,ds+2\sqrt{1-s^2}\,dt=0$
C: $s\sqrt{1-4t^2}+2t\sqrt{1-s^2}=C$

7. $2z(3z+1)dw+(1-2w)dz=0$
C: $(2w-1)(1+3z)=3cz$

8. $(x+4y)dx+2xdy=0$
C: $x^3+6x^2y=C$

9. $(2x^3+y^2)dx+(2xy+3y^2)dy=0$
C: $2x^3+3xy^2+3y^3=C$

10. $\frac{du}{dv}=\frac{1+u^2}{1+v^2}$
C: $u=\frac{v+c}{1-cv}$

11. Herhangi bir noktasındaki eğimi -1 - y/x olan ve A(2, 1) noktasından geçen eğrinin denklemini bulunuz.
C: $x^2+2xy=8$

12. Herhangi bir noktasındaki eğimi $\frac{y-1}{x^2+x}$ olan ve A(1, 0) noktasından geçen eğrinin denklemini bulunuz.
C: $y(1+x)=1-x$

c) Lineer Diferansiyel Denklemler

y' ve y ye göre 1. dereceden diferansiyel denklemlere denir.

$k(x)y'+l(x)y=m(x) \Rightarrow y'+\frac{l(x)}{k(x)}y=\frac{m(x)}{k(x)} \Rightarrow y'+yf(x)=g(x)$

biçimine indirgeyebiliriz. Bu tür denklemleri çözümü için u ve v iki fonksiyon olmak üzere y=uv koyalım.

$y=uv \Rightarrow y'=u'v+uv'$

$u'v+uv'+uvf(x)=g(x) \Rightarrow u(v'+vf(x))+u'v=g(x)$

$v'+vf(x)=0$ olacak biçimde v yi bulalım.

$\frac{dv}{dx}=-vf(x) \Rightarrow \frac{dv}{v}=-f(x)dx \Rightarrow \ln(v)=\int f(x)dx=\phi(x)$

$y=e^{\phi(x)}$ Bu seçime göre diferansiyel denklem;

$u'v=g(x) \Rightarrow \frac{du}{dx}e^{\phi(x)}=g(x) \Rightarrow du=\frac{g(x)}{e^{\phi(x)}}dx$

$\Rightarrow u=\int \frac{g(x)}{e^{\phi(x)}}dx+C$ bulunur.

Buradan da $y=e^{\phi(x)}\left(\int \frac{g(x)}{e^{\phi(x)}}dx+C\right)$ olur.

Örnek:

$xy'-y=x^2$ Diferansiyel denklemini çözelim.

Çözüm:

$y=uv \Rightarrow y'=u'v+v'u$ olsun.

$x(u'v+v'u)-uv=x^2 \Rightarrow u(xv'-v)+xvu'=x^2$

$xv'-x=0 \Rightarrow x\frac{dv}{dx}=v \Rightarrow \frac{dv}{v}=\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln(v)=\ln(x) \Rightarrow v=cx$

$x(cx)u'=x^2 \Rightarrow \frac{du}{dx}=\frac{1}{c} \Rightarrow du=\frac{dx}{c} \Rightarrow u=\frac{x}{c}+k$

$y=uv=(\frac{x}{c}+k)(cx)=x^2+kcx$

Alıştırmalar:

1. $xy'-2y=2x$
C: $y=Cx^2-2x$

2. $y'-2y+2x=1$
C: $y=x+Ce^{2x}$

3. $xy'+3x=2y$
C: $y=3x+Cx^2$

4. $xy'+2nx=3y$
C: $y=nx+Cx^3$

5. $\frac{ds}{dt}-s\cot an\,t+(t+2)\cot an\,t=1$
C: $s=t+2+C\sin t$

6. $\frac{dy}{dx}-\frac{2y}{x+1}=(x+1)^{5/2}$
C: $y=\frac{2}{3}(x+1)^{7/2}+C(x+1)^2$

d) Bernoulli (Lineer Şekle İndirgenebilen) Diferansiyel Denklemleri

$y'+yf(x)+y^n g(x)=0$ biçimindeki denklemlere denir.

Denklemin her iki yanını y^n ile bölelim.

$\frac{y'}{y^n}+y^{1-n}f(x)+g(x)=0$ Burada $z=y^{1-n}$ dönüşümünü yapalım.

$z'=(1-n)y'y^{-n} \Rightarrow \frac{y'}{y^n}=\frac{z'}{1-n} \Rightarrow \frac{z'}{1-n}+zf(x)+g(x)=0$

Böylece denklem z ye göre bir lineer homojen denkleme dönüşür.

Örnek:

$xy'+y=x^2y^2$ Diferansiyel denklemini çözelim.

Çözüm:

$z=y^{1-2}=y^{-1}=\frac{1}{y}$ dönüşüm yapalım. $z'=-\frac{y'}{y^2}$

Denklemin her iki yanını y^2 ile bölelim.

$x\frac{y'}{y^2}+\frac{1}{y}=x^2 \Rightarrow -z'x+z=x^2$

$z=uv$ koyalım. $z'=u'v+v'u \Rightarrow -(u'v+v'u)^x+uv=x^2$

$\Rightarrow u(v-v'x)=0 \Rightarrow v-\frac{dv}{dx}x=0 \Rightarrow v=\frac{dv}{dx}x \Rightarrow \frac{dv}{v}=\frac{dx}{x}$

$\Rightarrow \ln(v)=\ln(cx) \Rightarrow v=cx$

$u'cxx+x^2 \Rightarrow \frac{du}{dx}cx^2+x^2=0 \Rightarrow \frac{du}{dx}=\frac{-x^2}{cx^2} \Rightarrow du=\frac{dx}{c}$

$z=cx(\frac{-x}{c}+k)=-x^2+ckx \Rightarrow \boxed{y=\frac{1}{-x^2+kx}}$ bulunur.

Alıştırmalar:

1. $y'+2y/x=2y^2$
C: $Cx^2y+2xy=1$

2. $y'+y/x=y^3$
C: $Cx^2y^2+2xy^2=1$

3. $xy'-y=(x-1)e^x$
C: $y=e^x+Cx$

4. $\frac{ds}{dt}+\frac{s}{t}=\cos t+\frac{\sin t}{t}$
C: $s=\sin t+\frac{C}{t}$

5. $\frac{ds}{dt}+s=\cos t-\sin t$
C: $s=\cos t+Ce^{-t}$

6. $\frac{ds}{dt}-s\cot an\,t=e^t+C\sin t$

Aşağıdaki alıştırmalarda x ve y nin verilen değerleri ile belirtilen özel çözümlerini bulunuz.

7. $y'-2y/x=x^2e^x$; $x=1$ için $y=0$
C: $y=x^2(e^x-e)$

8. $y'+2y/x=\frac{1}{x^2}$; $x=1$ için $y=2$

Hasan KORKMAZ
İzmir Fen Lisesi Matematik Öğretmeni

C: $y = \frac{x+1}{x^2}$

9. $\frac{dy}{dx} + y \tan x = \sec x$; $x = 0$ için $y = -1$

C: $y = \sin x - \cos x$

10. $\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^2$; $x = 0$ için $y = 1$

C: $2y = (x+1)^2 + (x+1)^4$

11. Herhangi bir noktasındaki eğimi $\frac{y^2 \ln x - y}{x}$ olan ve P(1, 1) noktasından geçen eğrinin denklemini bulunuz.

C: $y(1 + \ln x) = 1$

e) Ricatti Diferansiyel Denklemi

$y'+yf(x)+y^2 g(x)+h(x)=0$ biçimindeki denklemlere denir.

Bu tip denklemler ancak y_1 gibi bir özel çözümün bilinmesi halinde çözülebilir. Gerçekten bir çözüm y_1 ise

$y=y_1 + \frac{1}{z}$ koyarak

$y'=y_1' - \frac{z'}{z^2} \Rightarrow y_1' - \frac{z'}{z^2} + (y_1 + \frac{1}{z})f(x) + (y_1 + \frac{1}{z})^2 g(x)+h(x)=0$

$[y_1' + y_1 f(x) + y_1^2 g(x)+h(x)] - \frac{z'}{z^2} + \frac{1}{z} f(x) + \frac{2y_1}{z} g(x) + \frac{g(x)}{z^2} = 0$

$y_1' + y_1 f(x) + y_1^2 g(x)+h(x)=0$ (y_1 özel çözüm olduğundan)

$-\frac{z'}{z^2} + \frac{1}{z} f(x) + \frac{2y_1}{z} g(x) + \frac{g(x)}{z^2} = 0$

$\Rightarrow -z'+z[f(x)+2y_1 g(x)+g(x)]=0$

lineer diferansiyel denklemin çözümüdür.

Örnek:

$(1+x^3)y' - x^2 y + y^2 + 2x = 0$ denkleminin bir özel çözümü $y = -x^2$ olduğunu gerçekleyip denklemi çözelim.

Çözüm:

$(1+x^3)(-2x) - x(y^2) + (-x^2)^2 + 2x = -2x - 2x^4 + x^4 + x^4 + 2x = 0$

Denklem Ricatti denklemidir.

$y=y_1 + \frac{1}{z}$ dönüşümünü kullanalım.

$y = -x^2 + \frac{1}{z} \Rightarrow y' = -2x - \frac{z'}{z^2}$

$\Rightarrow (1+x^3)(-2x - \frac{z'}{z^2}) - x^2(-x^2 + \frac{1}{z}) + (-x^2 + \frac{1}{z})^2 + 2x = 0$

$\Rightarrow [(1+x^3)(-2x) - x^2(-x^2) + (-x^2)^2 + 2x]$
$+ (1+x^3)(-\frac{z'}{z^2}) - x^2 \frac{1}{z} - 2x^2 \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} = 0$

Köşeli parantez içi 0 olduğundan;

$(1+x^3)(-\frac{z'}{z^2}) - x^2 \frac{1}{z} - 2x^2 \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} = 0$

elde edilir. Bu eşitliği z^2 ile çarpalım:

$(1+x^3)z' + 3x^2 z - 1 = 0$ (lineer denklemi) bulunur.

$z=uv$ koyalım. $z' = uv' + u'v$

$\Rightarrow (1+x^3)(uv' + u'v) + 3x^2 uv - 1 = 0$

$\Rightarrow u((1+x^3)v' + 3x^2 v) + (1+x^3)u'v - 1 = 0$

$(1+x^3)v' + 3x^2 v = 0$ olacak biçimde v fonksiyonunu bulalım:

$(1+x^3)v' + 3x^2 v = 0 \Rightarrow (1+x^3)\frac{dv}{dx} + 3x^2 v = 0$

$\Rightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{3x^2 dx}{1+x^3} \Rightarrow \ln v = \ln C - \ln(1+x^3)$

$\Rightarrow v = \frac{C}{1+x^3}$

$(1+x^3)u'v - 1 = 0 \Rightarrow (1+x^3)u'\frac{C}{1+x^3} - 1 = 0$

$\Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{C} \Rightarrow u = \frac{1}{C}x + K$

$\Rightarrow z = uv = \frac{C}{1+x^3}(\frac{1}{C}x + K)$ değeri,

$\Rightarrow y = -x^2 + \frac{1}{z}$ de yerine konursa,

$y = \frac{1 - KCx^2}{KC + x}$

$KC \rightarrow C$ konursa,

$\boxed{y = \frac{1 - Cx^2}{C + x}}$ bulunur.

Hasan KORKMAZ
İzmir Fen Lisesi Matematik Öğretmeni

Diferansiyel Denklemler
Alıştırmalar:

Aşağıda bir özel çözümü verilen Ricatti diferansiyel denklemlerinin genel çözümlerini bulunuz.

1. $xy'+y^2 -1 = 0$; $y = 1$ bir özel çözüm.

C: $y = \dfrac{x^2 + C}{x^2 - C}$

2. $y'+y+y^2 = 2$; $y = 1$ bir özel çözüm.

C: $y = \dfrac{Ce^{3x} + 2}{Ce^{3x} - 1}$

3. $2x^2 y' -2xy+y^2 = x^2$; $y=x$ bir özel çözüm.

C: $y = \dfrac{x^2 + C}{x - C}$

4. $(1+x^3)y'+x^2y+2xy^2+1 = 0$; $y = -x$ bir özel çözüm.

$y = \dfrac{1 - Cx}{x^2 + C}$

5. $y' - \dfrac{y^2}{1 - x^3} + \dfrac{x^2y}{1 - x^3} + \dfrac{2x}{1 - x^3} = 0$; $y = -x^2$ bir özel çözüm.

C: $y = -\dfrac{Cx^2 + 1}{x + C}$

f) Toplam Diferansiyellerin İntegrasyonu

$z = f(x,y)$ biçiminde iki değişkenli bir fonksiyonun **toplam diferansiyeli**;

$dz = \dfrac{\partial f}{\partial x}dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}dy$ dir.

Şayet 1. mertebeden bir diferansiyel denklemi;
$\boldsymbol{\dfrac{\partial f}{\partial x}dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}dy = 0}$ biçimine getirilebilirse; bu denklemin genel çözümü; $\mathbf{f(x,y) = C}$ dir.

Örnek:
$(2y - x)y' + 2x - y = 0$ diferansiyel denklemini çözelim.

Çözüm:

$(2y - x)y' + 2x - y = 0 \Rightarrow (2y - x)\dfrac{dy}{dx} + 2x - y = 0$
$\Rightarrow (2y - x)dy + (2x - y)dx = 0$

Son bulduğumuz toplam diferansiyel; $z = x^2+y^2-xy$ fonksiyonun toplam diferansiyeli olduğu görülebilir.
O halde denklemin genel çözümü; $\boxed{x^2+y^2-xy = C}$ dir.

Örnek:

$\left(\dfrac{2y}{x} - 1\right)y' - \dfrac{y^2}{x^2} = 0$ diferansiyel denklemini çözelim.

Çözüm:

$\left(\dfrac{2y}{x} - 1\right)y' - \dfrac{y^2}{x^2} = 0 \Rightarrow \left(\dfrac{2y}{x} - 1\right)dy - \dfrac{y^2}{x^2}dx = 0$

Son bulduğumuz toplam diferansiyel; $z = \dfrac{y^2}{x} - y$ fonksiyonun toplam diferansiyeli olduğu görülebilir.
O halde denklemin genel çözümü;
$\dfrac{y^2}{x} - y = C \Rightarrow \boxed{y^2-xy = Cx}$ bulunur.

Alıştırmalar:

Aşağıdaki toplam diferansiyellerin genel çözümlerini bulunuz.

1. $(\sin y)dx + (x\cos y + 3y^2)dy = 0$

C: $x\sin y + y^3 = C$

2. $\sin x \cos y\, dx + \cos x \sin y dy = 0$
$\cos x \cos y = C$

3. $(3x^2 e^y-2x)dx + (x^3 e^y - \sin y)dy = 0$

C: $x^3 + e^y + \cos y - x^2 = C$

4. $(3x^2\ln y)dx + \dfrac{x^3}{y}dy = 0$

C: $x^3 \ln y = C$

5. $(y + x^3)dx + (x + by^3)dy = 0$ (b sabit)

C: $4xy + x^4 + by^4 = C$

6. $(y^2\cos(xy^2) + a)dx + (2x\cos(xy^2) + 3y)ydy = 0$
(a sabit)

Hasan KORKMAZ
İzmir Fen Lisesi Matematik Öğretmeni

C: $\sin(xy^2) + ax + y^3 = C$

7. $\frac{2x}{y}dy + (2\ln 5y + \frac{1}{x})dx = 0$

C: $\ln x + 2x\ln 5y = C$

8. $(2xy\cos x^2 - 2xy + 1)dx + (\sin x^2 - x^2)dy = 0$

C: $y(\sin x^2 - x^2) = C - x$

2. Yüksek Mertebeden Diferansiyel Denklemler:

a) $\frac{d^n y}{dx^n} = f(x)$ Biçimindeki Diferansiyel Denklemler:

$$y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n} = f(x)$$

$$\Rightarrow y^{(n-1)} = \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \int \frac{d^n y}{dx^n} = \int f(x)dx$$

$$= f_1(x) + C_1$$

$$\Rightarrow y^{(n-2)} = \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} = \int \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \int (f_1(x) + C_1)\,dx$$

$$= f_2(x) + C_1x + C_2$$

...

Böylece ardışık olarak n defa integral alınarak, n tane ($C_1, C_2, ..., C_n$) serbest sabitli **genel çözüm** elde edilir.

İstenirse, n tane özel değer bilgisi verildiğinde, $C_1, C_2, ..., C_n$ sabitleri bulunarak, **özel çözümler** de bulunabilir.

Örnek:

$\frac{d^3y}{dx^3} = e^{2x}$ diferansiyel denkleminin;

a) Genel çözümünü;

b) x=0 için $y = \frac{25}{8}$, x=0 için y'=2 ve x=ln 6 için y''= 17 şartlarını sağlayan özel çözümü bulalım.

Çözüm:

a) $\frac{d^3y}{dx^3} = e^{2x} \Rightarrow y''' = e^{2x}$

$\Rightarrow y'' = \int e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x} + C_1$

$\Rightarrow y' = \int(\frac{1}{2}e^{2x} + C_1)dx = \frac{1}{4}e^{2x} + C_1x + C_2$

$\Rightarrow y = \int(\frac{1}{4}e^{2x} + C_1x + C_2)dx = \frac{1}{8}e^{2x} + \frac{1}{2}C_1x^2 + C_2x + C_3$

$\boxed{y = \frac{1}{8}e^{2x} + \frac{1}{2}C_1x^2 + C_2x + C_3}$ bulunur.

b) x=ln 6 için $y'' = \frac{1}{2}e^{2.\ln 6} + C_1 = \frac{1}{2}e^{\ln 36} + C_1 = 17$

$\Rightarrow 18 + C_1 = 17 \Rightarrow C_1 = 1$

x=0 için; $y' = \frac{1}{4}e^{2x} + C_1x + C_2 = \frac{1}{4} + 17.0 + C_2 = 2$

$\Rightarrow C_2 = \frac{7}{4}$

x= için; $y = \frac{1}{8}e^{2x} + \frac{1}{2}C_1x^2 + C_2x + C_3$

$y = \frac{1}{8} + 0 + 0 + C_3 = \frac{25}{8}$

$\Rightarrow C_3 = 3$ bulunur.

Buna göre istenen şartlara uyan özel çözüm;

$\boxed{y = \frac{1}{8}e^{2x} + \frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{4}x + 3}$ bulunur.

b) $\frac{d^2y}{dx^2} = f(y)$ Biçimindeki Diferansiyel Denklemler:

Bu biçimdeki denklemleri çözmek için aşağıdaki yol izlenir:

$\frac{d^2y}{dx^2} = f(y) \Rightarrow \frac{dy'}{dx} = f(y) \Rightarrow dy' = f(y)dx$

$\Rightarrow y'\,dy' = f(y)y'dx \Rightarrow y'\,dy' = f(y)\,dy$

$\Rightarrow \int y'\,dy' = \int f(y)\,dy$

Hasan KORKMAZ
İzmir Fen Lisesi Matematik Öğretmeni

$\Rightarrow \frac{1}{2}(y')^2 = F(y)+C_1$

Buradan y' çekilir ve bir daha integral alınarak y fonksiyonuna ulaşılır.

Örnek:

$\frac{d^2y}{dx^2} + 49y = 0$ diferansiyel denklemini çözelim.

Çözüm:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 49y = 0$$

$$\frac{dy'}{dx} + 49y = 0 \Rightarrow dy' = -49ydx$$

$$\Rightarrow y'dy' = -49y\,y'dx$$

$$\Rightarrow y'dy' = -49y\,dy$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(y')^2 = C_1 - \frac{49}{2}y^2$$

$$\Rightarrow (y')^2 = 2C_1 - 49y^2$$

$$\Rightarrow y' = \sqrt{2C_1 - 49y^2}$$

$2C_1 \to C_1$ koyalım.

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \sqrt{C_1 - 49y^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{\sqrt{C_1 - 49y^2}} = dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{7}\arcsin\frac{7y}{\sqrt{C_1}} = x + C_2$$

$$\Rightarrow \arcsin\frac{7y}{\sqrt{C_1}} = 7x + 7C_2$$

$$\Rightarrow \frac{7y}{\sqrt{C_1}} = \sin(7x + 7C_2)$$

$$\Rightarrow \frac{7y}{\sqrt{C_1}} = \sin 7x.\cos 7C_2 + \cos 7x.\sin 7C_2$$

$$\Rightarrow y = \frac{\sqrt{C_1}\cos 7C_2}{7}\sin 7x + \frac{\sqrt{C_1}\sin 7C_2}{7}\cos 7x$$

$\frac{\sqrt{C_1}\cos 7C_2}{7} \to C_1$ ve $\frac{\sqrt{C_1}\sin 7C_2}{7} \to C_2$ koyalım

Buna göre denklemin genel çözümü;

$\boxed{y = C_1\sin 7x + C_2\cos 7x}$ bulunur.

Not:

$\frac{d^2y}{dx^2} + a^2y = 0$ biçimindeki denklemlerin genel çözümü;

$\boxed{y = C_1\sin ax + C_2\cos ax}$ şeklinde genellenebilir.

Alıştırmalar:

1. $y'' = x^2$

C: $y = \frac{1}{12}x^4 + C_1x + C_2$

2. $y'' = 4\sin 2x$

C: $y = -\sin 2x + C_1x + C_2$

3. $y'' = e^{2x}$

C: $y = \frac{1}{4}e^{2x}\ C_1x + C_2$

4. $y'' = \frac{1}{(y+1)^2}$

C: $C_1(y+1)^2 = (C_1x + C_2)^2 + 1$

5. $y'' = \frac{a}{y^2}$

C: $C_1y^2 = a + (C_1x + C_2)^2$

6. $y'' = x + \sin x$

C: $y = \frac{1}{6}x^3 - \sin x + C_1x + C_2$

7. $y'' = 7\cos 8x$

C: $y = -\frac{7}{64}\cos 8x + C_1x + C_2$

8. $y'' = 8y$

C: $y = \frac{4}{3}x^3 + C_1x + C_2$

c) p ve q katsayıları sabit olan

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy = 0$$

Biçimindeki (İkinci Mertebeden Lineer) Diferansiyel Denklemler:

Önce, bu denklemi sağlayan $y=e^{rx}$ biçimindeki fonksiyonların r sabit değerlerini bulalım.

$$y=e^{rx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = r\,e^{rx} \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = r^2\,e^{rx}$$

Bu değerleri denklemde yerine koyalım;

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy=0 \Rightarrow r^2\,e^{rx} + p\,r\,e^{rx} + qe^{rx} = 0$$

$\Rightarrow e^{rx}(r^2 + p\,r + q) = 0$, $e^{rx} \neq 0$ olduğundan

$\boxed{r^2 + p\,r + q = 0}$ bulunur.

Bu denkleme ikinci mertebeden lineer diferansiyel denklemin, **karakteristik denklemi** denir.

Karakteristik denklemin köklerinin reel sayı veya karmaşık sayı olup olmamasına göre çözümleri inceleyelim.

i) $r^2 + p\,r + q = 0$ karakteristik denkleminin r_1 ve r_2 gibi iki farklı reel kökünün olması hali:

Bu durumda, $y = e^{r_1x}$ ve $y = e^{r_2x}$ fonksiyonları

diferansiyel denklemin iki özel çözümü olup, denklemin genel çözümü;

$\boxed{y = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x}}$ biçimindedir.

Gerçekten bu fonksiyonu incelediğimiz diferansiyel denklemde yerine koyarak denklemi sağladığını kolaylıkla görebilirz.

ii) $r^2 + p\,r + q = 0$ karakteristik denkleminin iki karmaşık sayı kökünün olması hali:

Bu durumda kökler birbirinin eşleniği olmak zorundadır

Örneğin, $r_1=a+bi$ ve $r_2 = a-bi$ olsun.

Bu değerleri genel çözümde yerine koyalım;

$$y = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x} = C_1e^{(a+bi)x} + C_2e^{(a-bi)x}$$

$$y = C_1e^{ax}.e^{bix} + C_2\,e^{ax}.e^{-bix}$$

$$y = e^{ax}(C_1e^{bix} + C_2e^{-bix})$$

$$y = e^{ax}(C_1(\cos bx + i\sin bx) + C_2(\cos bx - i\sin bx))$$

$$y = e^{ax}((C_1 + C_2)\cos bx + (C_1 - C_2)i.\sin bx)$$

$A = C_1 + C_2$, $B = (C_1 - C_2)i$ alırsak, genel çözüm;

$\boxed{y = e^{ax}(A\cos bx + B\sin bx)}$ olarak bulunur.

Not:
Matematikte çok önemli sayılardan biri olan e sayısı (e=2,7182818284590…) ile ilgili e^x fonksiyonunun seriye açılımı;

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$ dir.

Aşağıda sin x ve cos x (x radyan) fonksiyonlarının açılımları verilmiştir.

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + - \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + - \dots$$

$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$ serisinde

x yerine ix koyalım;

$$e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1!} + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \dots$$

$$e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1!} - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$e^{ix} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + - \dots + i\left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \dots\right)$$

$\boxed{e^{ix} = \cos x + i \sin x}$ (Euler Formülü) bulunur.

Buna göre;

$e^{bix} = \cos bx + i\sin bx$ ve $e^{-bix} = \cos bx + i\sin bx$ dir.

iii) $r^2 + p\,r + q = 0$ karakteristik denkleminin reel bir kökünün (köklerin çakışık) olması hali:

Bu durumda $r^2 + p\,r + q = 0$ denkleminin diskriminantı sıfırdır.

$\Delta = p^2 - 4q = 0 \Rightarrow q = \dfrac{p^2}{4}$ olur.

Buna göre karakteristik denklemden

$$r^2 + p\,r + q = r^2 + p\,r + \frac{p^2}{4} = (r + p/2)^2 = 0$$

$r_1 = r_2 = -p/2$ elde edilir.

Bu durumda; $y = e^{r_1 x}$ ve $y = xe^{r_1 x}$ özel iki çözüm olup denklemin genel çözümü;

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 x e^{r_1 x}$$

$$y = e^{r_1 x}(C_1 + C_2 x)$$

$\boxed{y = e^{-p/2}(C_1 + C_2 x)}$ olur.

Örnek:

$\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} - 3y = 0$ diferansiyel denklemini çözelim.

Çözüm:

Karakteristik denklemin köklerini bulalım;

$r^2 - 2r - 3 = 0 \Rightarrow (r-3)(r+1) = 0$

$r_1 = 3$ ve $r_2 = -1$

İki reel kök var olduğundan genel çözüm;

$\boxed{y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x}}$ bulunur.

Örnek:

$\dfrac{d^2y}{dx^2} - 6\dfrac{dy}{dx} + 10y = 0$ diferansiyel denklemini çözelim.

Çözüm:

Karakteristik denklemin köklerini bulalım;

$r^2 - 6r + 10 = 0 \Rightarrow (r-3)^2 + 1 = 0 \Rightarrow r_1 = 3 - i$ ve $r_2 = 3 + i$

Kökler eşlenik iki karmaşık sayıdır.

Buna göre denklemin genel çözümü;

$y = e^{ax}(A \cos bx + B \sin bx)$ formülünden,

$\boxed{y = e^{3x}(A \cos x + B \sin x)}$ bulunur.

Örnek:

$\dfrac{d^2y}{dx^2} - 10\dfrac{dy}{dx} + 25y = 0$ diferansiyel denklemini çözelim.

Çözüm:

Karakteristik denklemin köklerini bulalım;

$r^2 - 10r + 25 = 0 \Rightarrow (r-5)^2 = 0 \Rightarrow r = 5$ tek reel kök var.

Buna göre denklemin genel çözümü;

$\boxed{y = e^{5x}(C_1 + C_2 x)}$ bulunur.

Hasan KORKMAZ
İzmir Fen Lisesi Matematik Öğretmeni

Alıştırmalar:

1. $y'' - y' - 2y = 0$
C: $y = C_1e^{-x} + C_2e^{2x}$

2. $y'' - 4y' + 3y = 0$
C: $y = C_1e^{x} + C_2e^{3x}$

3. $y'' - 5y' + 4y = 0$
C: $y = C_1e^{x} + C_2e^{4x}$

4. $y'' - 4y' + 4y = 0$
C: $y = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x}$

5. $y'' + 5y' = 0$
C: $y = C_1 + C_2e^{-5x}$

6. $y'' + 36y = 0$
C: $y = C_1\cos 6x + C_2\sin 6x$

7. $y'' + 14y' + 49y = 0$
C: $y = C_1e^{-7x} + C_2xe^{-7x}$

8. $y'' + 2y' + 2y = 0$
C: $y = e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$

9. $y'' + 6y' + 58y = 0$
C: $y = e^{-3x}(C_1\cos 7x + C_2\sin 7x)$

Aşağıdaki problemlerde verilen şartları sağlayan özel çözümleri bulunuz.

10. $y'' + 3y' + 2y = 0$; $x = 0$ için $y = 0$ ve $y' = 1$
C: $y = e^{-x} - ^{-2x}$

11. $y'' + n^2y = 0$; $x = 0$ için $y = a$ ve $y' = 0$
C: $y = a \cos nx$

12. $y'' - n^2y = 0$; $x = 0$ için $y = 2$ ve $y' = 0$
C: $y = e^{nx} + e^{-nx}$

13. $y'' + 2y' - 8y = 0$; $x = 0$ için $y = 0$ ve $y' = 24$
C: $y = 4(e^{2x} - e^{-4x})$

14. $y'' - 8y + 16y = 0$; $x = 0$ için $y = 0$ ve $y' = 1$
C: $y = xe^{4x}$

15. $y'' + 8y' + 25y = 0$; $x = 0$ için $y = 4$ ve $y' = -16$
C: $y = 4 e^{-4x} \cos 3x$

16. $y'' - 6y' + 10y = 0$; $x = 0$ için $y = 1$ ve $y' = 4$
C: $y = e^{3x} (\cos x + \sin x)$

d) Katsayıları sabit n. Mertebeden Lineer Diferansiyel Denklemler:

$p_1, p_2, ..., p_n$ sabit olan;

$$\frac{d^ny}{dx^n} + p_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + p_2\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + ... + p_{n-1}\frac{dy}{dx} + p_ny = f(x)$$

biçimindeki denklemlere **Katsayıları sabit n. Mertebeden Lineer Diferansiyel Denklem** denir.

Not: Bazı kaynaklarda $D^n = \frac{d^ny}{dx^n}$ olduğu farzedilerek bu denklem;
$(D^n + p_1D^{n-1} + p_2 D^{n-2} + ... + p_{n-1}D + p_n)y = 0$
biçiminde gösterilir.

$f(x) = 0$ olması durumu (ikinci tarafı sıfıra eşit n.mertebeden lineer denklem) ve $f(x)\neq 0$ olması durumu olmak üzere bu denklemi iki halde inceleyeceğiz.

A) $$\frac{d^ny}{dx^n} + p_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + p_2\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + ... + p_{n-1}\frac{dy}{dx} + p_ny = 0$$

Katsayıları sabit n. Mertebeden (ikinci tarafı sıfıra eşit) Lineer Diferansiyel Denklemin Çözümü:
Bu denklemi sağlayan $y=e^{rx}$ biçimindeki fonksiyonların r sabit değerlerini bulalım.Bunun için denklemde $y=e^{rx}$ koyalım.

$(r^n + p_1r^{n-1} + p_2 r^{n-2} + ... + p_{n-1}r + p_n) e^{rx}= 0$

$e^{rx}\neq 0$ olduğundan;
$r^n + p_1r^{n-1} + p_2 r^{n-2} + ... + p_{n-1}r + p_n = 0$ denklemi elde edilir.Buna diferansiyel denklemin **karakteristik denklemi** denir.

Hasan KORKMAZ
İzmir Fen Lisesi Matematik Öğretmeni

Diferansiyel Denklemler

n. mertebeden lineer diferansiyel denklemi çözmek için aşağıdaki yol izlenir;

i) $r^n + p_1 r^{n-1} + p_2 r^{n-2} + ... + p_{n-1} r + p_n = 0$ karakteristik denkleminin tüm kökleri bulunur.

ii) Karakteristik denklemin kökleri için aşağıdaki kurallar uygulanır;

a) Farklı her r_j **reel** kökü , e^{r_j} özel çözümününü verir,

b) Farklı her **a ± bi** (eşlenik) **karmaşık sayı** çifti, $e^{ax}\cos bx$ **ve** $e^{ax}\sin bx$ özel çözümünü verir,

c) m defa tekrarlanan çok katlı kök , a) veya b) deki çözümlerinin $1, x, x^2, ..., x^{m-1}$ ile çarpılmaları ile elde edilen özel çözümlerini verir.

iii) Bu şekilde bulunan n tane bağımsız özel çözümün her birini $C_1, C_2, ... ,C_n$ keyfi sabitlerle çarparak toplarız.

Örnek:

$\frac{d^3y}{dx^3} - 3\frac{d^2y}{dx^2} + 4y=0$ diferansiyel denklemini çözelim.

Çözüm:

Diferansiyel denklemin karakteristik denklemini yazalım:

$r^3 - 3r^2 + 4 = 0$

Karakteristik denklemin kökleri; -1,2,2 dir.

Diferansiyel denklemin özel çözümleri;

e^{-x}, e^{2x}, xe^{2x} dir.

Buna göre denklemin genel çözümü;

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} + C_3 xe^{2x} = C_1 e^{-x} + (C_2+C_3 x)e^{2x}$$

$\boxed{y = = C_1 e^{-x} + (C_2+C_3 x)e^{2x}}$ bulunur.

Örnek:

$\frac{d^4y}{dx^4} - 4\frac{d^3y}{dx^3} + 10\frac{d^2y}{dx^2} - 12\frac{dy}{dx} + 5y=0$

diferansiyel denklemini çözelim.

Çözüm:

Diferansiyel denklemin karakteristik denklemini yazalım:

$r^4 - 4r^3 + 10r^2 - 12r + 5 = 0$

Karakteristik denklemin kökleri; 1, 1,1±2i dir.

Diferansiyel denklemin özel çözümleri;

$e^x, x e^x, e^x\cos 2x, e^x\sin 2x$ dir.

Buna göre denklemin genel çözümü;

$$y = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 e^x\cos 2x + C_4 e^x\sin 2x$$

$$y = (C_1 + C_2 x) e^x + (C_3\cos 2x + C_4\sin 2x) e^x$$

$\boxed{y = (C_1 + C_2 x + C_3\cos 2x + C_4\sin 2x) e^x}$ bulunur.

B) $\frac{d^ny}{dx^n} + p_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + p_2\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + ... + p_{n-1}\frac{dy}{dx} + p_n y = f(x)$

Katsayıları sabit n. Mertebeden (ikinci tarafı x in bir fonksiyonu olan) Lineer Diferansiyel Denklemin Çözümü:

Sabit katsayılı;

$\frac{d^ny}{dx^n} + p_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + p_2\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + ... + p_{n-1}\frac{dy}{dx} + p_n y = f(x)$

biçimideki n. mertebeden bir diferansiyel denklemin genel çözümlerini bulmak için aşağıdaki yol izlenir:

Hasan KORKMAZ
İzmir Fen Lisesi Matematik Öğretmeni

Diferansiyel Denklemler

i) $\frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + p_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + ... + p_{n-1}\frac{dy}{dx} + p_n y = 0$

diferansiyel denkleminin **y=u** genel çözümü (**bütünler çözümü**) bulunur.

ii) Denklemin sağ tarfındaki terimlere karşılık gelen bir **özel çözümü** bulunur.Bu özel çözüm bulnurken aşağıdaki maddelere dikkat etmeliyiz.

a) f(x) fonksiyonunda **n. dereceden bir polinom** varsa özel çözümde de **n. dereceden bir polinom** alabiliriz.

b) f(x) fonksiyonunda sin px, cos px veya bunların toplam veya farkı biçiminde terimler için özel çözümde;
a sin px + b cos px biçiminde fonksiyon alabiliriz.

c) f(x) fonksiyonunda $\mathbf{e^{px}}$ gibi terimler varsa; özel çözümde bunlara karşılık $\mathbf{a\, e^{px}}$ biçiminde fonksiyonlar alabiliriz.

iii) Eğer ii) nin a) b) veya c) şıklarındaki terimlerden herhangi biri bütünler çözümde mevcutsa, bu terimleri hiç biri bütünler çözümde bulunmayacak şekle getirmek için x ile veya x in (yeteri kadar) kuvvetleriyle çarparız.

iv) Özel çözümün varsayılan biçimini yazarak gerekli işlemler yapılır ve ilgili katsayıları belirleyerek **y = v özel çözümü** buluruz.

v) **y = u + v** yi yazarak denklemin **genel çözümünü** buluruz.

Örnek:
$y'' + 4y = 4e^{2x}$ diferansiyel denklemini çözelim.

Çözüm:

i) Önce, $y'' + 4y = 0$ denklemini çözelim.
Bu denklemin karakteristik denklemi; $r^2+4 = 0$ dir.
Karakteristik denklemin kökleri $0\pm2i$ olduğundan
bütünler çözüm $y = e^0 (C_1\cos 2x + C_2 \sin 2x)$

$y = C_1\cos 2x + C_2 \sin 2x$ dir.

ii) Özel çözüm $y = a\, e^{2x}$ biçiminde olmalıdır.
Bunu denklemde yerine koyalım;

$y = a\, e^{2x} \Rightarrow y' = 2a\, e^{2x} \Rightarrow y'' = 4a\, e^{2x}$

$4a\, e^{2x} + 4(a\, e^{2x}) = 4\, e^{2x} \Rightarrow 8a\, e^{2x} = 4\, e^{2x} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$
bulunur.
Buna göre özel çözüm $y = \frac{1}{2} e^{2x}$ dir.

Ohalde denklemin genel çözümü bulduğumuz iki çözüm toplanarak;

$\boxed{y = C_1\cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{2} e^{2x}}$ olarak bulunur.

Örnek:
$y'' + 4y' + 4y = 6 \sin 3x$ diferansiyel denklemini çözelim.

Çözüm:

i) Önce, $y'' + 4y' +4 = 0$ denklemini çözelim.
Bu denklemin karakteristik denklemi; $r^2+ 4r + 4 = 0$ dir.
Karakteristik denklemin kökleri -2,-2 olduğundan
bütünler çözüm $y = C_1 e^{-2x} + C_2\, xe^{-2x}$

$y = (C_1 e + C_2\, x)\, e^{-2x}$ dir.

ii) Özel çözüm $y = a \sin 3x + b \cos 3x$ biçiminde olmalıdır.

Bunu denklemde yerine koyalım;

$y = a \sin 3x + b \cos 3x \Rightarrow y' = 3a \cos 3x - 3b \sin 3x$

$y'' = -9a \sin 3x - 9b \cos 3x$

$(-9a \sin 3x - 9b \cos 3x) + 4(3a \cos 3x - 3b \sin 3x) + 4(a \sin 3x + b \cos 3x) = 6\sin 3x$

$(-5a -12b)\sin 3x + (-5b +12a)\cos 3x = 6\sin 3x$

$-5a -12b = 6$ ve $-5b +12a = 0$ denklemlerinden

$a = -\frac{30}{169}$ ve $b = -\frac{72}{169}$ bulunur.

Buna göre özel çözüm $y = -\frac{30}{169} \sin 3x + -\frac{72}{169} \cos 3x$ dir.

Ohalde denklemin genel çözümü bulduğumuz iki çözümü toplayarak;

$y = (C_1 e + C_2\, x)\, e^{-2x} - \frac{30}{169} \sin 3x - \frac{72}{169} \cos 3x$

olarak bulunur.

Örnek:
$y'' + 2y'+y = 2 \cos 2x +3x+2+3e^x$ diferansiyel denklemini çözelim.

Çözüm:

i) Önce, $y'' + 2y'+y = 0$ denklemini çözelim.
Bu denklemin karakteristik denklemi; $r^2+2r+1 = 0$ dır.
Karakteristik denklemin kökleri -1,-1 olduğundan

Hasan KORKMAZ
İzmir Fen Lisesi Matematik Öğretmeni

bütünler çözüm $y = C_1e^{-x} + C_2\,xe^{-x}$

$y = (C_1 + C_2\,x)e^{-x}$ dir.

ii) Özel çözüm $y = a \sin 2x + b \cos 2x + cx + d + f\,e^{x}$ biçiminde olmalıdır.

Bunu denklemde yerine koyup gerekli sadeleştirmeler yapılırsa;

$a = \frac{8}{25}$, $b = -\frac{6}{25}$, $c = 3$, $d = -4$, $f = \frac{3}{4}$ bulunur.

Böylece özel çözüm;

$y = \frac{8}{25}\sin 2x - \frac{6}{25}\cos 2x + 3x - 4 + \frac{3}{4}\,e^{x}$ olur.

Buna göre denklemin genel çözümü de;

$y = (C_1 + C_2\,x)e^{-x} + \frac{8}{25}\sin 2x - \frac{6}{25}\cos 2x + 3x - 4 + \frac{3}{4}\,e^{x}$ bulunur.

Alıştırmalar:

1. $\frac{d^2y}{dt^2} + y = at + b$

C: $y = C_1\cos t + C_2\sin t + at + b$

2. $\frac{d^2y}{dt^2} + y = ae^{bt}$

C: $y = C_1\cos t + C_2\sin t + \frac{ae^{bt}}{b^2+1}$

3. $\frac{d^2y}{dt^2} + y = 4\cos t$

C: $y = C_1\cos t + C_2\sin t + 2t\sin t$

4. $\frac{d^2y}{dt^2} + y = 4\sin 2t$

C: $y = C_1\cos t + C_2\sin t - \frac{4}{3}\sin 2t$

5. $\frac{d^2s}{dt^2} - 4s = at + b$

C: $s = C_1\,e^{2t} + C_1\,e^{-2t} - \frac{1}{4}(at + b)$

6. $\frac{d^2s}{dt^2} - 4s = 2e^{t}$

C: $C_1\,e^{2t} + C_2\,e^{-2t} - \frac{2}{3}\,e^{t}$

7. $\frac{d^2s}{dt^2} - 4s = e^{2t}$

C: $s = C_1\,e^{2t} + C_2\,e^{-2t} - \frac{1}{4}\,te^{2t}$

8. $\frac{d^2y}{dx^2} + 9y = 5x^2$

C: $C_1\cos 3x + C_2\sin 3x + \frac{5}{9}x^2 - \frac{10}{81}$

9. $\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} - 2y = 4t$

C: $y = C_1\,e^{-t} + C_2\,e^{2t} + 1 - 2t$

10. $\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} + x = 8$

C: $C_1\,e^{t} + C_2\,te^{t} + 8$

11. $\frac{d^2s}{dt^2} - 4\frac{ds}{dt} + 3s = 6e^{2t}$

C: $s = C_1\,e^{t} + C_2\,e^{3t} - 6e^{2t}$

12. $\frac{d^2s}{dt^2} + 2\,\frac{ds}{dt} + 2s = 8e^{2t}$

C: $s = e^{-t}\,(C_1\cos t + C_2\sin t) + \frac{4}{5}\,e^{2t}$

13. $\frac{d^2y}{dt^2} - 4\frac{dy}{dt} + 3x = 4e^{t}$

C: $y = C_1\,e^{t} + C_2\,e^{3t} - 2te^{t}$

Hasan KORKMAZ
İzmir Fen Lisesi Matematik Öğretmeni

14. $\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} + 5y = 3\sin 2t$

C: $y = e^t(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t) + \frac{3}{5}\cos t - \frac{3}{10}\sin 2t$

15. $\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} + 5y = 3\sin 2t$

C: $e^t(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t) + \frac{13}{17}\cos 2t - \frac{3}{17}\sin 2t$

16. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 2e^x$

C: $y = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2)e^x + \frac{1}{3}x^3 e^x$

17. $y''' + 6y'' + 12y' + 8y = e^x$

C: $y = \frac{1}{27}e^x + (C_1 + C_2 x + C_3 x^2)e^{-2x}$

18. $\frac{d^4y}{dx^4} + 2\frac{d^2y}{dx^2} + y = 3\cos 2x$

C: $y = \frac{1}{3}\cos 2x + C_1 \cos x + C_2 \sin x +$

$C_3 x \cos x + C_4 x \sin x$

Diferansiyel Denklemlerin Çözümlerinin Bilgisayar Uygulaması:

Bir çok matematik problemini, bilgisayarın desteğini alarak kolayca çözebiliriz.

Bunun için matematik desteği veren uygun bir bilgisayar programı kullanmalıyız.Bu amaca yönelik bir çok program üretilmiştir.Bunlardan başta gelenlerden birisi de **Matlab** programıdır. Matlab'ın kullanımıyla ilgili bilgi edinmek ve çözümlü örneklerini incelemek için, İzmir Fen Lisesi web sayfasının; http://www.ifl.k12.tr/projedosyalar/dosyalar.htm bağlantısından matlab.pdf dosyasını indirebilirsiniz.

Matlab ile Diferansiyel Denklemleri de çözebiliriz. Matlab'da bir Diferansiyel denklemin **genel** ve belirli şartlara uyan **özel** çözümlerini buldurabiliriz.

Bunun için aşağıdaki kurallara dikkat etmeliyiz.

i) Matlab y gibi bir fonksiyonun varsayılan değişkenini **x** değil **t** olarak kabul etmektedir.Yani diferensiyel denklemimizi yazarken, serbest değişken için t kulanmalıyız.

Not: Şayet, değişken olarak x (veya başka bir harf) kullanmak istersek, bunu, komut içinde virgül ile ayrılmış iki ' (kesme) arasında belirtmeliyiz.

ii) y' türev fonksiyonu için **Dy**, y'' 2. mertebeden türev fonksiyonu için **D2y**, y''' 3. mertebeden türev fonksiyonu için **D3y** … yazmalıyız.

iii) Matlab denklemleri **sembolik** olarak çözümlediğinden, denklemleri ve gerekirse özel değerleri iki ' (kesme) arasına yazmalıyız.Birden fazla ifade yazacaksak ayraç olarak aralara , (virgül) koymalıyız.

dsolve komutu:
t bağımsız değişkenine bağlı y gibi bir fonksiyon ve türevlerinden oluşan sembolik ifadeye karşılık gelen diferensiyel denkleminin **genel** ve istenirse tanımlanmış ilk değerlere karşılık gelen **özel** çözümlerini bulmaya yarar.

Kullanımı:

dsolve('diferensiyel denklem') komutuyla yazılan diferensiyel denklemin **genel çözümünü** buluruz.

dsolve('diferensiyel denklem','özel değer1','özel değer2', …) komutuyla yazılan diferensiyel denklemin özel değer1, özel değer2, … özel değerlerine karşılık gelen **özel çözümünü** buluruz.

Not 1: Sonuçların daha düzenli görüntsünü almak için, dsolve komutundan önce **pretty** komutunu kullanabilirsiniz.

Not 2: Daha geniş açıklama için Matlab'ın komut satırında;
>>**help dsolve**
yazıp (Enter) tuşuna basınız.

Örnek 1:

$xy' - 2y = x^3 - 2x + 8$ diferensiyel denkleminin;

a) Genel çözümünü bulduran,
b) x=1 için y= -6 değerini veren özel çözümü bulduran,
c) Sonuçların ekranda düzenli görünmesini sağlayan,
d) Sonucu x değişkenine bağlı olarak görüntüleyen,
e) Sonuc a değişkenine bağlı olarak görüntüleyen komutları yazalım.

Çözüm:

a) dsolve('t*Dy-2*y=t^3-2*t+8')

b) dsolve('t*Dy-2*y=t^3-2*t+8','y(1)=-6')

Hasan KORKMAZ
İzmir Fen Lisesi Matematik Öğretmeni

c) pretty(dsolve('t*Dy-2*y=t^3-2*t+8','y(1)=-6'))

d) pretty(dsolve('x*Dy-2*y=x^3-2*x+8','x'))

e) pretty(dsolve('a*Dy-2*y=a^3-2*a+8','a'))

Ekranda a) nın sonucu; t^3-4+2*t+t^2*C1

b) nin sonucu; t^3-4+2*t-5*t^2

c) nin sonucu;

$$t^3 - 4 + 2\,t - 5\,t^2$$

d) nin sonucu;

$$x^3 - 4 + 2\,x + x^2\;C1$$

e) nin sonucu;

$$a^3 - 4 + 2\,a + a^2\;C1$$

biçiminde görülür.

Örnek 2:

$x^2 y'' + 4xy' + 2y = 0$ diferensiyel denkleminin;

a) Genel çözümünü bulduran,
b) x=1 için y=1 ve x= -2 için y= -5/4 değerini veren özel çözümünü bulduran,
c) x=-1 için y'=1 ve x=2 için y''=0değerini veren özel çözümünü bulduran komutları yazalım.

Çözüm:

a) pretty(dsolve('t^2*D2y+4*t*Dy+2*y=0'))

b) pretty(dsolve('t^2*D2y+4*t*Dy+2*y=0','y(1)=1','y(-2)=-5/4'))

c) pretty(dsolve('t^2*D2y+4*t*Dy+2*y=0','Dy(-1)=1','D2y(2)=0'))

Ekran Görüntüleri:

a)
$$\frac{C1}{t} + \frac{C2}{t^2}$$

b)
$$2/t - \frac{1}{t^2}$$

c)
$$- 3/7\; 1/t + 2/7\; \frac{1}{t^2}$$

Örnek 3:

Y'''+4y'=48sin4x diferensiyel denkleminin;

a) Genel çözümünü bulduran,

b) x=0 için y=1, x= 0 için y'= 0 ve x=π/4 için y'''=-4 değerini veren özel çözümünü bulduran komutları yazalım.

Çözüm:

a) pretty(dsolve('D3y+4*Dy=48*sin(4*t)'))

b) pretty(dsolve('D3y+4*Dy=48*sin(4*t)','y(0)=1', 'Dy(0)=1','D3y(pi/4)=-4'))

Ekran Görüntüleri:

a)
$$2\cos(2\,t)^2 - 1 + C1 + C2\sin(2\,t) + C3\cos(2\,t)$$

b)
$$2\cos(2\,t)^2 - 1/2 + 1/2\sin(2\,t) - 1/2\cos(2\,t)$$

Faydalanılan Kaynaklar:

1. Matematik Dersleri, Prof. Dr. Lutfi BİRAN İstanbul Ü. Fen Fakültesi - Şirketi Mürettibiye Basımevi - İstanbul 1970
2. Diferensiyel ve İntegral Hesap, W.A. GRANVILLE - Şirketi Mürettibiye Basımevi - İstanbul 1970
3. Diferansiyel Denklemler, Uygulamaları ve Çözüm Tekniği , Prof. Dr. Murrav R. SPIEGEL - Çağlayan Kitabevi -1975
4. http://www.ifl.k12.tr/projedosyalar/dosyalar.htm adresinde tumevarim-diziler dosyası.
5. http://www.ifl.k12.tr/projedosyalar/dosyalar.htm adresinde matlab dosyası.