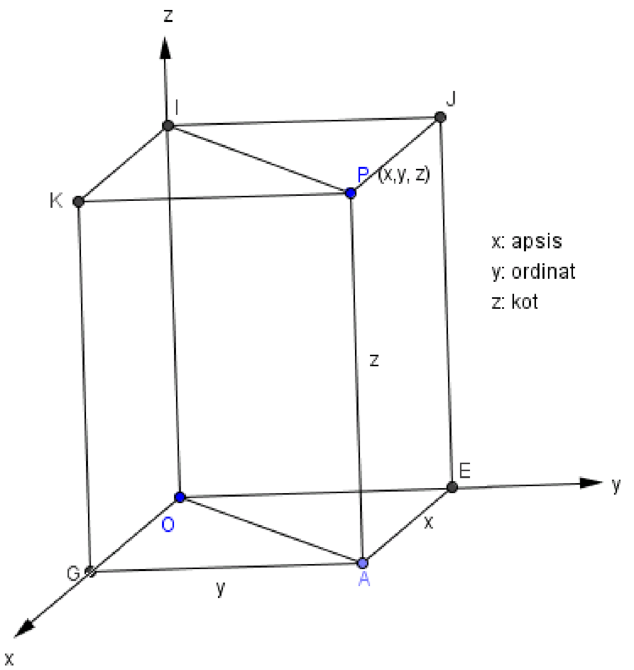
UZAY ANALİTİK GEOMETRİ

Uzayda Koordinat Sistemi ve Uzayda Vektörler:
Tanım: Uzayda (üç boyutlu) birbirine ikişer ikişer dik sayı eksenlerinin oluşturduğu sisteme **üç boyutlu uzayda koordinat sistemi** denir.Bu üç eksenin kesiştiği O noktasına orijin, eksenlerden birisi Ox ekseni, diğerlerinden birisi Oy ekseni üçüncüsüne ise Oz ekseni denir.

Uzayda Bir Noktanın Koordinatları:
Uzayda bir P noktasından xOy düzlemine dik indirelim.Dikme ayağı P' olsun.Bu noktadan Ox ve Oy eksenine dikmeler inelim.Bu noktalara karşılık gelen reel sayılar x ve y olsun.P den Oz eksenine paralel çizelim.Bu doğruyla Oz ekseni bir düzlem oluşturur.P den Oz eksenine inilen dikme ayağı P'' olsun.Bu noktaya karşılık gelen reel sayı z olsun.İşte bu üç reel sayıya P noktasının koordinatları denir ve bu **P(x,y,z)** ile gösterilir.Buradaki x bileşenine **apsis** , z bileşenine **ordinat** ve z bileşenine **kot** denir. Böylece uzaydaki her bir noktaya (x,y,z) sıralı reel sayı üçlüleri karşılık gelir.Böylece uzay **RxRxR** üçlü kartezyen çarpım kümesi ile veya $\mathbf{R^3}$ ile gösterilir.



İki Nokta Arasındaki Uzaklık:

$A(x_1,y_1,z_1)$ ve $B(x_2,y_2,z_2)$ noktaları verilsin.Bu iki nokta arasındaki uzaklık;

$|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$ dir.

Örnek:
A(3,1,5), B(-1,m,1) noktaları veriliyor. $|AB|$=6 birim ise a kaçtır?

Çözüm:

$|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$ formülünde değerler yerine konursa $16+(1-m)^2+16=36 \Rightarrow m=-1$ veya m=3 bulunur.

Bir Doğru Parçasının Orta Noktası

$A(x_1,y_1,z_1)$ ve $B(x_2,y_2,z_2)$ noktaları verilsin.Bu iki noktanın belirlediği [AB] doğru parçasının C orta noktasının koordinatları, ikişer ikişer koordinatlarının aritmetik ortasıdır. Yani;

$C\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2}\right)$ dir.

Örnek:
A(-1,7,3) noktasının B(2,-3,5) noktasına göre simetriği C noktasının koordinatlarını bulalım.

Çözüm:
C(x,y,z) olsun.$\frac{-1+x}{2}=2 \Rightarrow x=5$, $\frac{7+y}{2}=-3 \Rightarrow y=-13$

$\frac{3+z}{2}=5 \Rightarrow z=7$ dir. O halde C(5,-13,7) olur.

Kürenin Analitik İncelenmesi:
Üç boyutlu uzayda, bir M(a,b,c) noktasına, r kadar uzaklıkta bulunan tüm noktar kümesine (geometrik yerine) bir **küre**, buradaki M noktasına kürenin **merkezi** r sayısına da **yarıçap uzunluğu** denir.

Küre Denklemi:
Küre üzerinde değişken bir nokta P(x,y,z) olsun.P noktaları değişse de $|MP|$=r değişmeyecektir.

O halde; $|MP|=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}=r$

$\Rightarrow (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$ bulunur.Bu denklem merkezi M(a,b,c) ve yarıçap uzunluğu r olan küre denklemidir.

Bu denklemi açalım:
$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cy+a^2+b^2+c^2-r^2=0$

Burada A=-2a, B=-2b, C=-2c, $D=a^2+b^2+c^2-r^2$ alınırsa küre denklemi;
$x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0$ biçimine gelir.

$A=-2a \Rightarrow a=-A/2$, $B=-2b \Rightarrow b=-B/2$, $C=-2c \Rightarrow c=-C/2$
$D=a^2+b^2+c^2-r^2 \Rightarrow r^2=a^2+b^2+c^2-D$

$\Rightarrow r^2=\frac{A^2}{2}+\frac{B^2}{2}+\frac{C^2}{2}-D=\frac{1}{4}.(A^2+B^2+C^2-4D)$

$\Rightarrow r=\frac{1}{2}\sqrt{A^2+B^2+C^2-4D}$ bulunur.

Not:
$x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0$ denkleminin irdelenmesi:

a) $A^2 + B^2 + C^2 - 4D > 0$ ise yukarıdaki denklem bir küre belirtir.
b) $A^2 + B^2 + C^2 - 4D = 0$ ise yukarıdaki denklem yarıçapı 0 olan bir noktasal küre (kürenin merkezi) belirtir.
c) $A^2 + B^2 + C^2 - 4D < 0$ ise yukarıdaki denklem gerçek bir küre belirtmez (sanal bir küre belirtir.)

Örnek:
Merkezi M(3,-2,-5) olan ve P(1,2,-2) noktasından geçen küre denklemini bulalım.

Çözüm:
$r = |MP| = \sqrt{(1-3)^2 + (2+2)^2 + (-2+5)^2} = \sqrt{29}$
O halde küre denklemi;
$(x-3)^2 + (y+2)^2 + (z+5)^2 = 29$ veya
$x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y + 10z + 9 = 0$ bulunur.

Örnek:
$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 3y - 5z + k = 0$ denkleminin bir küre belirtiğine göre k nın alacağı değer aralığını bulalım.

Çözüm:
$A^2 + B^2 + C^2 - 4D > 0$ olmalıdır.
$4+9+25-4k > 0 \Rightarrow k < 19/2$ bulunur.

Üç Boyutlu Uzayda Vektörler:
Üç boyutlu uzayda herhangi bir P(x,y,z) noktasını düşünelim.Başlangıç noktası O, bitim noktası P olan $\overrightarrow{OP}$ vektörüne **konum (yer) vektörü** denir.Böylece uzaydaki noktalarla bunlara karşılık gelen konum vektörleri arasında bire-bir bir eşleme yapabiliriz.
Bu şekildeki analitik uzaya, **üç boyutlu vektör uzayı** denir.

P(x,y,z) ise $\overrightarrow{OP}$ vektörünün de bileşenleri (x,y,z) sıralı üçlüsü ile gösterebiliriz.Yani $\overrightarrow{OP} = (x,y,z)$ yazabiliriz.

Tanım:

$A(x_1,y_1,z_1)$ ve $B(x_2,y_2,z_2)$ noktaları için $\overrightarrow{AB}$ vektörüne O dan çizilen eş $\overrightarrow{OP}$ vektörüne, $\overrightarrow{AB}$ nün konum (yer) vektörü denir.Bu iki vektör birbirine eşit olarak alınır.Yani;
$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ dir.
Çünkü; $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_2,y_2,z_2) - (x_1,y_1,z_1)$
$= (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ dir.

Bir Vektörün Uzunluğu (=Normu):
Bir vektöre karşılık gelen $\overrightarrow{OP}$ konum vektörünün P uç noktasının orijine uzaklığı bu vektörün uzunluğu (normu) denir ve bu $|\overrightarrow{OP}|$ ile gösterilir.
Yani; P(x,y,z) ise $|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ dir.
Buna göre; $A(x_1,y_1,z_1)$ ve $B(x_2,y_2,z_2)$ noktaları için
$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}$ dir.

Birim Vektör:
Uzunluğu 1 birim olan vektörlere **birim vektör** denir.

Not: Ox ekseni üzerindeki $\vec{e_1} = (1,0,0)$,
Oy ekseni üzerindeki $\vec{e_2} = (0,1,0)$,
Oz ekseni üzerindeki $\vec{e_3} = (0,0,1)$ vektörlerine;
$|\vec{e_1}| = |\vec{e_2}| = |\vec{e_3}| = 1$ birim olduğundan **standart birim vektörler** denir.

Örnek:
$\vec{u} = (1/2, -1/3, a)$ vektörü veriliyor.
a) Uzunluğu 3 birim ise b) Birim vektör ise a kaç olmalıdır?

Çözüm:
a) $1/4 + 1/9 + a^2 = 9 \Rightarrow a = \frac{\sqrt{311}}{6}$
b) $1/4 + 1/9 + a^2 = 9 \Rightarrow a = \frac{\sqrt{23}}{6}$ bulunur.

Vektörler Arasındaki Bağıntılar ve İşlemler:
a) İki Vektörün Eşitliği:
$\vec{a} = (x_1,y_1,z_1)$ ve $\vec{b} = (x_2,y_2,z_2)$ vektörleri için
$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow x_1 = x_2$ ve $y_1 = y_2$ ve $z_1 = z_2$ dir.

b) İki Vektörün Toplamı:
$\vec{a} = (x_1,y_1,z_1)$ ve $\vec{b} = (x_2,y_2,z_2)$ vektörleri için
$\vec{a} + \vec{b} = (x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2)$ dir.
Toplama İşleminin Özellikleri:
Vektörler arasında tanımlanan toplama işleminin
i) Kapalılık ii) Değişme iii) Birleşme özellikleri vardır.(Bu özellikler klayca gösterilebilir)
iv) $\forall \vec{a} \in R^3$ ve $\vec{0} = (0,0,0)$ için; $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ olduğundan;
$\vec{0}$ toplama işleminin etkisiz elemanıdır.
v) $\forall \vec{a} = (x_1,y_1,z_1) \in R^3$ için $-\vec{a} = (-x_1,-y_1,-z_1)$ dir.

$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$ olduğundan $\vec{a}$ nün toplama işlemine göre ters elemanı $-\vec{a}$ dır.

c) İki Vektörün Farkı:

$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$ olarak tanımlanır.

Yani; $\vec{a} - \vec{b} = (x_1-x_2, y_1-y_2, z_1-z_2)$ dir.

d) Bir Vektörün Skaler (Reel Sayı) İle Çarpımı:

$\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ vektörü ve $k \in R$ verilsin.

$k\vec{a} = k(x_1, y_1, z_1) = (kx_1, ky_1, kz_1)$ dir.

Bir Vektörün Reel Sayı İle Çarpımının Özellikleri:

$\vec{a}$ ve $\vec{b}$ iki vektör ve $k, m \in R$ olsun.

i) $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$ dir.

ii) $k(m\vec{a}) = m(k\vec{a}) = (km)\vec{a}$ dir.

iii) $(k+m)\vec{a} = k\vec{a} + m\vec{a}$ dir.

iv) $-1.\vec{a} = -\vec{a}$ ve $1.\vec{a} = \vec{a}$ ve $0.\vec{a} = \vec{0}$ dir.

Bu özellikler, vektörler arasındaki toplama işlemi ve reelsayıların özellikleri kullanılarak kolayca ispatlanabilir.

e) İki Vektörün Paralelliği:
Doğrultuları paralel olan vektörlere **paralel vektörler** denir.İki konum vektörü paralel ise doğrultuları çakışık olur.Bu durumda birisi diğerinin ($k \neq 0$ olmak üzere) k katı olur.Yani; $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ vektörleri ile $k \neq 0$ reel sayısı verilsin.

$\vec{a} // \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = k.\vec{b}$

$\Leftrightarrow (x_1, y_1, z_1) = k(x_2, y_2, z_2) = (kx_2, ky_2, kz_2)$

$\Leftrightarrow x_1 = kx_2$ ve $y_1 = ky_2$ ve $z_1 = kz_2$

$\Leftrightarrow x_1/x_2 = y_1/y_2 = z_1/z_2$ bulunur.

O halde iki vektör paralel ise bileşenleri orantılıdır. (Paralellik şartı)

Vektörlerin Lineer Bileşimi:
Vektörlerden oluşan bir V vektör uzayında, $k_1, k_2, k_3, \ldots, k_n \in R$, $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \ldots, \vec{v}_n \in V$ olmak üzere; $\vec{v} = k_1\vec{v}_1 + k_2\vec{v}_2 + k_3\vec{v}_3 + \ldots + k_n\vec{v}_n$ vektörüne $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \ldots, \vec{v}_n$ vektörlerinin bir lineer bileşimi denir.

Örnek:
$\vec{v} = (-5,9,1)$ vektörünü, $\vec{v}_1 = (-1,3,4)$, $\vec{v}_2 = (3,0,1)$ ve $\vec{v}_3 = (0,1,-2)$ vektörlerinin bir lineer bileşimi olarak yazalım.

Çözüm:
$k_1\vec{v}_1 + k_2\vec{v}_2 + k_3\vec{v}_3 = \vec{v}$ olacak biçimde $k_1, k_2, k_3 \in R$ sayılarını bulmalıyız.

$k_1(-1,3,4) + k_2(3,0,1) + k_3(0,1,-2) = (-5,9,1)$

$\Rightarrow (-k_1+3k_2, 3k_1+k_3, 4k_1+k_2-2k_3) = (-5,9,1) \Rightarrow$

$-k_1+3k=-5$

$3k_1+k_3=9$

$4k_1+k_2-2k_3=1$ denklem sistemi çözülürse; $k_1=2$, $k_2=-1$, $k_3=3$ bulunur.O halde aranan lineer bileşim;

$\vec{v} = 2\vec{v}_1 - \vec{v}_2 + 3\vec{v}_3$ tür.

Lineer Bağımlılık, Lineer Bağımsızlık:
Vektörlerden oluşan bir V vektör uzayında, $k_1, k_2, k_3, \ldots, k_n \in R$, $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \ldots, \vec{v}_n \in V$ olmak üzere; $k_1\vec{v}_1 + k_2\vec{v}_2 + k_3\vec{v}_3 + \ldots + k_n\vec{v}_n = \vec{0}$ eşitliğini sağlayan en az biri sıfırdan farklı, $k_1, k_2, k_3, \ldots, k_n \in R$ varsa $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \ldots, \vec{v}_n\}$ kümesi **lineer bağımlı** aksi halde (yani $k_1=k_2=k_3=\ldots=k_n=0$ olmak zorunda ise) $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \ldots, \vec{v}_n\}$ kümesi **lineer bağımsız**dır denir.

Taban ve Boyut:
Vektörlerden oluşan bir V vektör uzayında, $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \ldots, \vec{v}_n\}$ kümesi verilsin. Bu küme;
a) **lineer bağımsız**,

b) V uzayını **geriyorsa** (yani $\forall \vec{x} \in V$ vektörü bu vektörlerin bir lineer bileşimi olarak yazılabiliyorsa)
$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \ldots, \vec{v}_n\}$ kümesi V uzayının bir **tabanı** (baz), n sayısına da V uzayının **boyutu** denir ve dim(V)=boy(V)=n yazılır.

Örnek:
a) {(1,-2,-3), (-3,6,9)}
b) {(1,3,-2),(2,6,2)}
c) {(1,1,0),(-2,3,5),(0,5,5)}

d) {(1,2,-5),(0,0,0),(7,1,-3)}
e) {(1,1,0),(2,1,1),(0,1,1)}
f) {(1,1,1),(-1,2,0),(2,2,3),(1,1,2)}kümelerinin lineer bağımlı olup lmadıklarını araştıralım.
g) Yukarıdaki kümelerden hangileri üç boyutlu vektör uzayının (R^3 ün) bir tabanıdır.

Çözüm:

a) $k_1(1,-2,-3)+ k_2(-3,6,9)=(0,0,0)$

$\Rightarrow k_1-3k_2=0$

$-2k_1+6k_2=0$

$-3k_1+9k_2=0$ denklem sistemielde edilir.
Halbuki bu denklemlerin üçü de birbirine denktir.
Aslında burada tek denklem vardır yani; $k_1-3k_2=0$

$\Rightarrow k_1=3k_2$ Buna göre k_1, k_2 nin 3 katı olmak üzere sıfırdan farklı sonsuz çözüm bulabiliriz.O halde {(1,-2,-3), (-3,6,9)} kümesi lineer bağımlıdır.

Not: Vektörlerin bileşenlerine dikkatlice bakarsakorantılı olduğunu görürüz.
Yani iki vektörün lineer bağımlı olması, biri diğerinin bir katı olması, birbirine paralel olması aynı anlama gelir.

b) {(1,3,-2),(2,6,2)}
$1/2=3/6\neq-2/2$
Bu iki vektörün bileşenleri orantılı olmadığından lineer bağımsızdır.

c) {(1,1,0),(-2,3,5),(0,5,5)}
1. Yol:

$k_1(1,1,0)+k_2(-2,3,5)+k_3(0,5,5)\}=(0,0,0)$

$\Rightarrow k_1-2k_2=0$

$k_1+3k_2+5k_3=0$

$5k_2+5k_3=0$

1. denklemden $k_1=2k_2$

3. denklemden $k_3=-k_2$ değerleri 2. denklemde yerine konursa; $5k_2+5k_3=0$ elde edilir.Bu ise 3. denklemdir.
O halde gerçekte farklı olarak iki denklem vardır.Burada bilinmeyenlerden birine örneğin $k_3=t$ diyelim.Böylece $k_2= -t$ ve $k_1=-2t$ olmak üzere $(k_1,k_2,k_3)=(-2t, -t, t)$, $t\in R$ olmak üzere sıfır çözümden farklı sonsuz tane (k_1,k_2,k_3) üçlüsü bulunur.
O halde {(1,1,0),(-2,3,5),(0,5,5)} kümesi lineer bağımlıdır.

2. Yol:

$k_1(1,1,0)+k_2(-2,3,5)+k_3(0,5,5)\}=(0,0,0)\Rightarrow$

$k_1-2k_2=0$

$k_1+3k_2+5k_3=0$

$5k_2+5k_3=0$ Denklem sisteminin sıfır çözümünden farklı çözümlerinin olması denklem sisteminin katsayılarından oluşan determinantın değerinin (veya vektörleri alt alta yazarak oluşturulan determinantın) sıfır olması gerekir.Gerçekten;

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & 5 \end{vmatrix}=0$ olduğu görülür.yani bu vektörler lineer bağımlıdır.

d) {(1,2,-5),(0,0,0),(7,1,-3)}
1. Yol: Vektörleri sırasıyla hepsi birden sıfır olmayan (örneğin, 0, 2007 ve 0) sayılarıyla çarpıp toplayalım;
0.(1,2,-5)+2007.(0,0,0)+0.(7,1,-3)=(0,0,0) olduğundan bu küme (genel olarak içinde $\vec{0}$ vektörü bulunan her küme)
lineer bağımlıdır.
2. Yol: Her bir vektörü bir satıra yazarak oluşturulan determinantın değeri sıfır olacağından bu küme lineer bağımlıdır.

e) {(1,1,0),(2,1,1),(0,1,1)}
Her bir vektörü bir satıra yazarak oluşturulan determinantın değeri

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-1\neq0$ olduğundan bu üç vektör lineer bağımsızdır.

f) {(1,1,1),(-1,2,0),(2,2,3),(1,1,2)}

$k_1(1,1,1)+k_2(-1,2,0)+k_3(2,2,3)+k_4(1,1,2)=(0,0,0)$
eşitliği bizi 4 bilinmeyenli 3 denklemden oluşan bir denklem sistemine götürür.Böyle bir denklemin her zaman sıfır çözümlerinden başka (sonsuz tane) çözümü vardır.Örneğin $k_4=t$ diyerek diğer bilinmeyenleri t parametresine göre çözümlerini bulabiliriz.O halde 4 (veya daha fazla) vektörden oluşan her küme lineer bağımlıdır.

g) Vektörlerden oluşan bir kümenin taban olabilmesi için **lineer bağımsız** ve ilgili vektör uzayını **germesi** **(**yani $\forall \vec{x} \in R^3$ vektörü bu vektörlerin bir lineer bileşimi olarak yazılabilmesi) gerekir.
{(1,-2,-3), (-3,6,9)}, {(1,1,0),(-2,3,5),(0,5,5)}, {(1,2,-5),(0,0,0),(7,1,-3)}, {(1,1,1),(-1,2,0),(2,2,3),(1,1,2)} kümeleri lineer bağımlı olduklarından taban olamaz.
{(1,3,-2),(2,6,2)} kümesi lineer bağımsızdır.

Acaba bu küme R^3 ü gerer mi?Bakalım:

$\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)\in R^3$ olsun.

$(x_1,x_2,x_3)=k_1(1,3,-2)+k_2(2,6,2)$

$\Rightarrow k_1+2k_2=x_1$

$3k_1+6k_2=x_2$

$-2k_1+2k_2=x_3$

Denklem sisteminde ilk iki denklemden bulunan k_1,k_2 değerleri her zaman üçüncü denklemi sağlamayacağından bu iki vektör R^3 ü germez.O halde bu küme bir taban olamaz.

{(1,1,0),(2,1,1),(0,1,1)} kümesi lineer bağımsızdır. Acaba bu küme R^3 ü gerer mi?Bakalım:

$\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)\in R^3$ olsun.

$(x_1,x_2,x_3)=k_1(1,1,0)+k_2(2,1,1)+k_3(0,1,1)$

$k_1+2k_2=x_1$

$k_1+k_2+k_3=x_2$

$k_2+k_3=x_3$

Üç bilinmiyenli bu denklemin çözümü vardır ve tektir. O halde bu küme R^3 ü gerer. Buna göre bu küme R^3 ün bir tabanıdır.

Not:
Yukarıdaki örnekte olduğu gibi lieer bağımsız üç vektör R^3 ün bir tabanıdır.

Standart Taban Vektörleri:
$\overrightarrow{e_1}=(1,0,0)$, $\overrightarrow{e_2}=(0,1,0)$, $\overrightarrow{e_3}=(0,0,1)$ vektörleri lineer bağımsızdır.

$\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)\in R^3$ olsun.

$\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)=(x_1,0,0)+(0,x_2,0)+(0,0,x_3)$

$=x_1(1,0,0)+x_2(0,1,0)+x_3(0,0,1)$

$=x_1\overrightarrow{e_1}+x_2\overrightarrow{e_2}+x_3\overrightarrow{e_3}$

O halde $\{\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}\}$ kümesi de R^3 ü gerer.

Buna göre $\{\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}\}$ R^3 ün bir tabanıdır.Bu tabana **standart taban** denir.

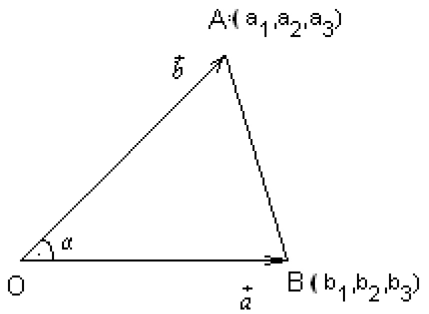
Skaler (=İç) Çarpım:

Tanım: $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ vektörleri için $m(\vec{a},\vec{b})=\alpha$ olmak üzere;
$<\vec{a},\vec{b}>=\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\alpha$ çarpımına "$\vec{a}$ ile $\vec{b}$ nin **skaler(=iç) çarpımı**" denir.

Teorem:
$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ vektörleri için;

$\vec{a}.\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$ tür.

İspat:



OAB üçgeninde cosinus teoremi uygulayalım;

$|\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2-2|\overrightarrow{OA}|\,|\overrightarrow{OB}|\cos\alpha$

$(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2$
$=a_1^2+a_2^2+a_3^2+b_1^2+b_2^2+b_3^2-2\vec{a}.\vec{b}$

Gerekli işlemle yapılırsa;

$\vec{a}.\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$ bulunur.

Skaler Çarpımın Özellikleri:
V vektörlerden oluşan bir vektör uzayı olsun.

1. $\forall\vec{a},\vec{b}\in V$ için $\vec{a}.\vec{b}\in R$ olduğundan; skaler (iç) çarpım fonksiyonu f ise;
$f:VxV\rightarrow R$ olan bir fonksiyondur.
2. $\forall\vec{a},\vec{b}\in V$ için $\vec{a}.\vec{b}=\vec{b}.\vec{a}$ dir.(Simetri özelliği)
3. $\forall\vec{a}\in V$ $(\vec{a}\neq\vec{0})$ için $\vec{a}.\vec{a}=\vec{a}^2=|\vec{a}|^2>0$ (Pozitif tanımlılık özelliği)
4. $\forall\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in V$ için $\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}$ dir.
5. $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörleri sıfır vektörlerinden farklı olsun.

$\vec{a}.\vec{b}=0\Leftrightarrow\vec{a}\perp\vec{b}$ dir. (Diklik şartı)

İZMİR FEN LİSESİ UZAY ANALİTİK GEOMETRİ ÇALIŞMA SORULARI
(Küre ve Uzayda Vektörler) (Kasım 2012)

01. A(-5,3,2), B(1,3,5) ve C(-2,-1,a) noktaları veriliyor.
a) [AB] nın D orta noktasının koordinatlarını bulunuz.
b) $|AB|=|AC|$ ise a kaçtır?

02. Bir tabanı ABCD, diğer tabanı A'B'C'D' olan ABCDA'B'C'D' pirizması göz önüne alınıyor. A(3,1,0), B(3,5,0), C(1,5,0) ve D'(1,1,4) tür.

a) Bu pirizmanın tüm yüzleri paralelkenar (paralelyüz) ise diğer köşelerinin koordinatlarını bulunuz.

b) Bu pirizma dikdörtgenler pirizması olabilmesi için D köşesinin koordinatlarını bulunuz. Bu durumda cismin hacmini, yüzey alanını ve cisim köşegenini hesaplayınız.

03. Merkezi M(3,3,1) olan ve
a) P(3,-1,5) noktasından geçen;
b) xOy düzlemine teğet olan;
c) $x^2+y^2+z^2-2z=7$ küresine teğet olan küre denklemini bulunuz.

04. A(-1,8,3) ve B(11,4,-7) noktaları verilyor.[AB] çaplı küre denklemini bulunuz.

05. P(1,1,2) noktasından geçen ve her üç koordinat düzlemlerine teğet olan küre denklemini bulunuz.

06.$x^2+y^2+z^2+2x-10y+(m+1)z=m$ küresi xOy düzlemine teğetse kürenin merkezini ve yarıçap uzunluğunu bulunuz.

07.$(x-2)^2+(y-5)^2+(z+7)^2=81$ küresinin P(-2,-1,5) noktasına en kısa ve en uzun uzaklıklarını bulunuz.

08. $\overrightarrow{AB}=(3,-1,4)$ vektörü ile B(1,4,2) noktası veriliyor.A noktasının koordinatlarını ve $\overrightarrow{OA}$ vektörü ve bu vektörün normunu bulunuz.

09. $\vec{a}=(m-1,2,n)$ ve $\vec{b}=(n+4,p,3-m)$ vektörleri veriliyor. $\vec{a}=\vec{b}$ ise $\vec{v}=(m,n,p)$ vektörünün normunu bulunuz.

10. $\vec{a}=(m-3,2,-6)$ ve $\vec{b}=(2,n+5,-3)$ vektörleri paralel ise m ve n kaçtır?

11. A(-1,3,5), B(a,-2,3), C(3,4,-7) ve D(1,2,b) noktaları veriliyor. $\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{CD}$ ise ave b yi bulunuz.

12. $\vec{a}=(3,-1,2)$ vektörü ile aynı doğrultudaki birim vektörleri bulunuz.

13. (-1,2,-2) vektörünü {(2,1,0),(3,0,1),(0,-2,1)} vektörlerinin lineer bileşimi olarak yazınız.

14. A(3,2,-1) noktası ile $\overrightarrow{AB}=(5,-7,6)$ vektörü veriliyor.B noktasını bulunuz.

15. A(-1,3,2), B(5,-1,1) noktaları ile $\vec{v}=(p-1,3-k,-3)$ vektörü veriliyor. $\overrightarrow{AB}//\vec{v}$ ise $\vec{v}$ vektörünün uzunluğunu (normunu) bulunuz.

16 .
a) $\vec{v}=(0,-2,5)$ vektörünü $\vec{a}=(1,-1,0)$, $\vec{b}=(2,0,1)$ ve $\vec{c}=(-2,2,2)$ vektörlerinin bir lineer bileşimi olarak ifade ediniz.
b) Uzayın herhangi bir $\vec{w}=(x,y,z)$ vektörü a) şıkkında verilen vektörlerin bir lineer bileşimi olarak ifade edilebilir mi?

c) $\vec{v}=(0,-2,5)$ vektörünü $\vec{a}=(1,-1,0)$, $\vec{b}=(2,0,1)$ ve $\vec{c}=(0,-2,-1)$ vektörlerinin bir lineer bileşimi olarak ifade edilebilir mi?Edilemezse neden?

17. $\vec{u}=(x,0,1)$, $\vec{v}=(2,y,3)$ ve $\vec{w}=(2,1,z)$ vektörleri lineer bağımlı ise x,y,z arasında hangi bağıntı olmalıdır?

18. $\vec{A}=(3,-1,4)$, $\vec{B}=(m,2,-1)$ ve $\vec{C}=(2,4,1)$ vektörleri veriliyor. $\overrightarrow{AB}\perp\vec{C}$ olduğuna göre m kaçtır?

19. A(8,2,0), B(4,6,-7), C(-3,1,2),D(-9,-2,4) noktaları veriliyor.
Buna göre; $\overrightarrow{AB}$ ile $\overrightarrow{CD}$ vektörleri arasındaki açının kosinüsünü bulunuz.

20. $|\vec{a}|=2\sqrt{3}$ br, $|\vec{b}|=2$ br $m(\vec{a},\vec{b})=30°$ olduğuna göre; $\vec{a}+\vec{b}$ ile $\vec{a}-\vec{b}$ vektörleri arasındaki açının kosinüsünü hesaplayınız.

21. Köşe koordinatları A(8,3,-5), B(2,3,-4), C(3,5,2) olan ABC üçgeninin dik üçgen olduğunu ispatlayınız.

22. A(a,1,-1), B(2a,0,2), C(2a+2,a,1) noktaları veriliyor. $\vec{AB} \perp \vec{BC}$ ise A, B ve C noktalarını bulunuz.

23. $|\vec{a}|=6$ br, $|\vec{b}|=4$ br dir.

a) $\vec{a}+k\vec{b}$ ile $\vec{a}-k\vec{b}$

vektörleri dik ise k kaçtır?

b) $m(\vec{a},\vec{b})=60°$ ise $\vec{a}+2\vec{b}$ nün uzunluğu kaçtır?

24. $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$, $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$ ise

$\vec{a}\,.\,\vec{b}+\vec{b}\,.\vec{c}+\vec{c}\,.\vec{a}$ değerini bulunuz.

25. $|\vec{a}|=4$ br, $\cos(\vec{e_1},\vec{a})=3/4$ ve $m(\vec{e_2},\vec{a})=60°$ ise

$\vec{a}$ nü bulunuz.

26. A(3,-3,5) , B(3, 2,-7) ve C(1,-1,0) noktaları

a) $\vec{AB}$ b) $|\vec{AB}|$ c) $\vec{AB}$ boyunca birim vektörü

d) $\vec{AB}$ nün $\vec{AC}$ üzerindeki dik izdüşüm vektörünü

e) ABC üçgeninin B açısı için sinB değerini

f) ABC üçgeninin alanını bulunuz.

Çözüm:

a) $\vec{AB}=(0,5,-12)$

b) $|\vec{AB}|=\sqrt{0^2+5^2+(-12)^2}=13$ br

c) $\vec{AB}$ boyunca birim vektörü $\vec{e}=(x,y,z)$ olsun.

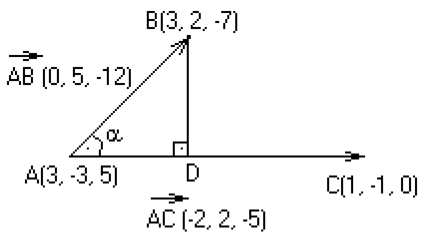
$\vec{AB}\,//\,\vec{e} \Rightarrow \frac{x}{0}=\frac{y}{5}=\frac{z}{-12}=k$ (katsayıları orantılı olmalı)

x=0, y=5k, z=-12k ve $|\vec{e}|=1$ olmalıdır.

$\sqrt{0^2+25k^2+144k^2}=1 \Rightarrow k=1/13$ dir.

O halde $\vec{e}=(0, \frac{5}{13}, -\frac{12}{13})$ bulunur.

d)



$\vec{AB}$ nün $\vec{AC}$ vektörü üzerindeki izdüşüm vektörü $\vec{AD}$ olsun.

$\vec{AC}$ boyunca birim vektör $\vec{e}$ ise

$\vec{AD}=|\vec{AD}|\,\vec{e}$ olmalıdır.

$$|\vec{AD}|=|\vec{AB}|\,|\cos\alpha|=|\vec{AB}|\,\left|\frac{\vec{AB}\cdot\vec{AC}}{|\vec{AB}|\,|\vec{AC}|}\right|$$

$|\vec{AD}|=13.\frac{0+10+60}{13.\sqrt{33}}=\frac{70}{\sqrt{33}}$ O halde;

$\vec{AD}=\frac{70}{\sqrt{33}}\left(\frac{-2}{\sqrt{33}}, \frac{2}{\sqrt{33}}, -\frac{-5}{\sqrt{33}}\right)=\frac{70}{33}(-2, 2, -5)$ bulunur.

f) m(BAC)=a olsun.Buna göre;

$A(ABC)=\frac{|AB|\,|AC|\sin a}{2}$

$\sin a=\sqrt{1-\cos^2 a}$

$$\cos a=\frac{\vec{AB}\cdot\vec{AC}}{|\vec{AB}|\,|\vec{AC}|}=\frac{70}{13\sqrt{33}}$$

$A(ABC)=\frac{\sqrt{677}}{2}$ br² bulunur.

27. $\vec{p}=(2,1,1)$ ve $\vec{q}=(3,4,-1)$ vektörlerine dik olan birim vektörleri bulunuz.

R^3 te (Üç Boyutlu Uzayda) Vektörel Çarpım:

Uzayda $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ vektörleri için;

$\vec{a}$ **x** $\vec{b}$ **=**$(a_2b_3-a_3b_2\ ,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1)$

$=(a_2b_3-a_3b_2)\overrightarrow{e_1}-(a_1b_3-a_3b_1)\overrightarrow{e_2}+(a_1b_2-a_2b_1)\overrightarrow{e_3}$

vektörüne $\vec{a}$ ile $\vec{b}$ vektörlerinin **vektörel çarpımı (dış çarpım)** denir.

Not 1: Tanımdan yola çıkarak $\vec{a}$ **x** $\vec{b}$ **= -** $\vec{b}$ **x** $\vec{a}$ olduğu görülebilir.

Not 2:
$(\vec{a}\times\vec{b}).\vec{a}=0$ (yani $(\vec{a}\times\vec{b})\perp\vec{a}$)
$(\vec{a}\times\vec{b}).\vec{b}=0$ (yani $(\vec{a}\times\vec{b})\perp\vec{b}$)

olduğunu vektörel çarpım ve skaler çarpım tanımları kullanılarak ispatlanabilir.

Bu sonuç bize; $\vec{a}$ x $\vec{b}$ vektörünün $\vec{a}$ ile $\vec{b}$ vektörlerinin belirttiği düzleme dik olduğunu gösterir.

Not 3: $\vec{a}$ ile $\vec{b}$ vektörleri arasındaki açı α olmak üzere; $\vec{a}$ **x** $\vec{b}$ nin uzunluğu, $\vec{a}$ ile $\vec{b}$ vektörleri üzerine kurulu paralelkenarın alanına eşit olduğu yani;

$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}|.|\vec{b}|.\sin\alpha$ ispatlanabilir.

Not 4: Uzayda $A(a_1,a_2,a_3)$, $B(b_1,b_2,b_3)$,

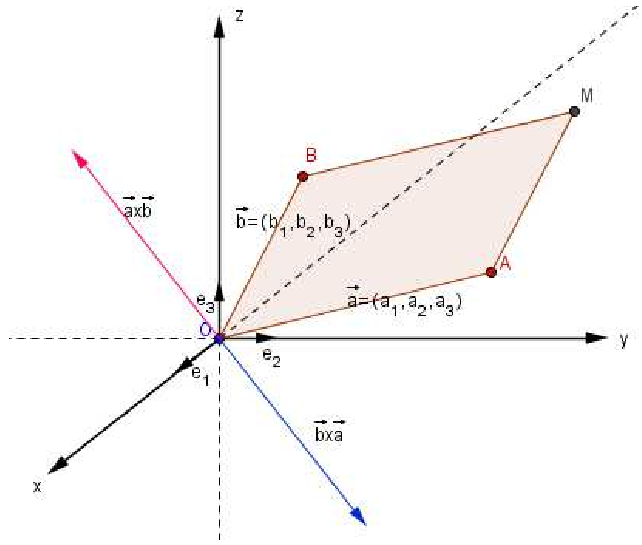
$C(c_1,c_2,c_3)$ noktaları verildiğinde;

$A(ABC)=\left|\dfrac{\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}}{2}\right|$ dir.

Not 5: $\vec{a}x\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$ dir.

(Bunun doğruluğu, determinant açıldığında, vektörel çarpımın tanımındaki ifadeyi verdiği kolayca görülebilir.)

Vektörel Çarpımın Geometrik Yorumu:



Uzayda $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ vektörleri için; uzunluğu $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörleri üzerine kurulu OAMB paralelkenarın alanına eşit, doğrultusu $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörlerinin belirttiği düzleme dik ve yönü sağ elin dört parmağı $\vec{a}$ vektöründen $\vec{b}$ vektörüne doğru yönlendirdiğimizde; başparmağın gösterdiği yönde (sağ el kuralı) olan vektöre **"$\vec{a}$ ile $\vec{b}$ vektörlerinin vektörel çarpımı"** denir ve bu $\vec{a}$ **x** $\vec{b}$ ile gösterilir.

Vektörel Çarpımın Özellikleri:

1) $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$ dir.

2) $\vec{a}\times\vec{0}=\vec{0}$

3) $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$

4) $k\in R$ olmak üzere; $(k\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(k\vec{b})=k(\vec{a}\times\vec{b})$ dir.

5) $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$ dir.

(Bunların doğruluğu yukarıdaki özelliklerden uygun olanları kullanılarak kolayca gösterilebilir.)

Örnek: $\vec{a}=(5,6,4)$ ve $\vec{b}=(2,-2,3)$ vektörleri için; $\vec{a}$ x $\vec{b}$ yi hesaplayalım.

Çözüm:

$$\vec{a}x\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\\ 5 & 6 & 4\\ 2 & -2 & 3\end{vmatrix}=26\vec{e}_1-7\vec{e}_2-22\vec{e}_3=(26,-7,-22)$$

bulunur.

Örnek: A(1, -3, 5) , B(0,-1, 4) ve C(3, 3, -2) noktaları veriliyor. ABC üçgeninin alanını bulalım.

Çözüm: Önce $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ yi hesaplayalım;

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ =(-1,2,-1)x(2,6,-7)=

$$\begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & -7 \end{vmatrix} = -8\vec{e}_1 - 9\vec{e}_2 - 10\vec{e}_3$$

A(ABC) = $\left| \dfrac{\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}}{2} \right| = \dfrac{\sqrt{245}}{2}$ birim kare bulunur.

R^3 te (Üç Boyutlu Uzayda) Karma Çarpım:

Uzayda $\vec{a}$, $\vec{b}$ $\vec{c}$ vektörleri için; $\vec{a}$ ile $\vec{b}$ nin vektörel çarpımı ile $\vec{c}$ nin skaler çarpımına yani; $(\vec{a}\,\mathbf{x}\,\vec{b}).\vec{c}$ ına "$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektörlerinin **karma çarpımı** " denir ve bu $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$ veya $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ ile gösterilir.

Örnek: $\vec{a}$ =(1, -3, 0) , $\vec{b}$ =(0,-1, 2) ve $\vec{c}$ =(3, 1, -2) vektörlerinin karma çarpımını bulalım.

Çözüm: Önce $\vec{a}\,\mathbf{x}\,\vec{b}$ yi bulalım.

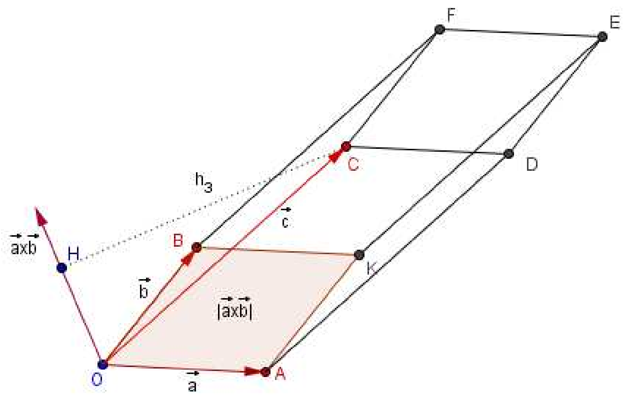
$$\vec{a}x\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -6\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3 = (-6, -2, -1)$$

Sonra da $\vec{a}\,\mathbf{x}\,\vec{b}$ =(-6, -2,-1) vektörü ile $\vec{c}$ =(3, 1, -2) nün skaler çarpımını hesaplayalım;

$(\vec{a} \times \vec{b}).\ \vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$=(-6, -2,-1).(3, 1, -2) = -18-2+2 = -18 bulunur.

Not 1: **(Karma Çarpımın Geometrik Yorumu:)**

Üç boyutlu uzayda $\vec{a}$ =(a_1,a_2,a_3), $\vec{b}$ =(b_1,b_2,b_3), $\vec{c}$ =(c_1,c_2,c_3) vektörleri alalım.Bu konum vektörlerin uç noktaları A, B, C olsun.



Bu üç vektörün üzerine kurulu (belirlediği) paralelyüzün hacmini (paralelkenar eğik pirizma) düşünelim.

$\vec{c}$ nin C uç noktasından $\vec{a} \times \vec{b}$ nün taşıyıcı doğrusuna CH dikmesi inelim.

Paralelyüzün hacmi ;
V= Alan(OAKB) .|OH|
Alan(OAKB)=| $\vec{a} \times \vec{b}$ | ve |OH|=| $\vec{c}$ |.cos(COH) olduğundan;

V=| $\vec{a} \times \vec{b}$ |.| $\vec{c}$ |.cos(COH) = $(\vec{a} \times \vec{b}).\vec{c}$ =< $\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}$ >

Bu da $\vec{a}$ ile $\vec{b}$ vektörlerinin vektörel çarpımının $\vec{c}$ ile skaler çarpımıdır.

İşte bu çarpım da $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektörlerinin karma çarpımı olup $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$ (veya $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$) ile gösterilir.

O halde $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektörleri üzerine kurulu paralelyüzün hacmi (hacim değeri pozitif ya da 0 olabileceğinden) $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$ karma çarpımının mutlak değerine eşittir.

Not 2: Üç boyutlu uzayda $\vec{a}$ =(a_1,a_2,a_3), $\vec{b}$ =(b_1,b_2,b_3), $\vec{c}$ =(c_1,c_2,c_3) vektörlerinin karma çarpımı aynı zamanda $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ dir.

(Bunun doğruluğu karma çarpımın tanımı kullanılarak kolayca yapılabilir.)

Karma Çarpımın Özellikleri:

1) $(\vec{a} \times \vec{b}).\ \vec{c} = \vec{a}.(\vec{b} \times \vec{c})$ dir

2) $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}] = [\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}]$ dir.

3) $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = -[\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}] = -[\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}]$ dir.

4) $[\vec{a}, \vec{0}, \vec{c}] = 0$ dır.

5) $[\vec{a}, \vec{a}, \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{b}] = [\vec{c}, \vec{b}, \vec{c}] = 0$ dır.

6) $[k\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a}, k\vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{b}, k\vec{c}] = k[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$ dir.

7) $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}+\vec{d}] = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] + [\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}]$ dir.

(Bunların ispatı determinantların özellikleri veya karma çarpımın geometrik yorumu kullanılarak kolayca yapılabilir.)

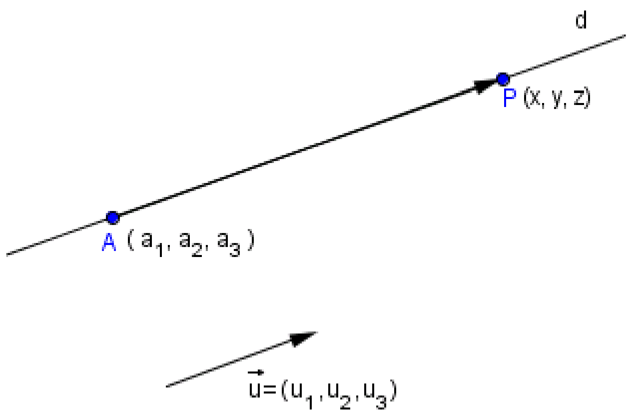
R^3 te (Üç Boyutlu Uzayda) Doğru:

Uzayda bir doğrunun belirtilebilmesi için

a) Bir noktası ve doğrultusu,

b) İki farklı noktası bilinmesi yeterlidir.

Bir noktası ve doğrultusu bilinen doğru denklemi:



Uzayda A (a_1,a_2,a_3) noktası ile $\vec{u}$=(u_1,u_2,u_3) verilsin. A dan geçen $\vec{u}$ vektörüne paralel olan doğru da d olsun. d∈P olacak biçimde herhangi bir değişken P(x,y,z) noktası alalım. d doğrusunun denklemini bulmak demek x, y, z değişkenleri arasında bir bağıntı bulmak demektir.

Şekilden görüleceği gibi;k∈R olmak üzere;

$\overrightarrow{AP} // \vec{u} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{AP} = k\vec{u}}$ dir.

(Bu eşitlik d doğrusunun **vektörel denklemi**, $\vec{u}$=(u_1,u_2,u_3) vektörüne d doğrusunun **doğrultu vektörü** denir.)

$\overrightarrow{AP} // \vec{u} \Rightarrow \overrightarrow{AP} = k\vec{u}$

$\Rightarrow$ (x- a_1, y-a_2, z-a_3) = k(u_1,u_2,u_3) = (ku_1,ku_2,ku_3)

$\Rightarrow$ x- a_1= ku_1 , y-a_2 = ku_2 , z-a_3 = ku_3

$\Rightarrow \boxed{x = a_1+ku_1 \text{ , } y = a_2+ku_2 \text{ , } z = a_3+ku_3}$

Bu üçlü eşitliğe A (a_1,a_2,a_3) noktasından geçen ve $\vec{u}$=(u_1,u_2,u_3) doğrultu vektörüne paralel olan d doğrusunun **parametrik denklemi** denir.

$$\Rightarrow \boxed{\frac{x-a_1}{u_1} = \frac{y-a_2}{u_2} = \frac{z-a_3}{u_3} = k}$$

Son bulduğumuz üçlü orantı da A (a_1,a_2,a_3) noktasından geçen ve $\vec{u}$=(u_1,u_2,u_3) doğrultu vektörüne paralel olan d doğrusunun **kartezyen denklemi**dir.

Örnek:

A(1, -2, 4) noktasından geçen ve $\vec{u}$=(2, 0, -5) vektörüne paralel olan doğrunun;

a) Vektörel denklemini, b) Parametrik denklemini

c) Kartezyen denklemini bulalım.

d) d doğrusu üzerinde öyle bir nokta bulunuz ki koordinatları toplamı 2013 olsun.

Çözüm:

a) P∈d ,P(x,y,z) olsun.
$\overrightarrow{AP}$ =k$\vec{u}$ ⇒(x-1, y+2, z-4) =k(2, 0, -5)

b) x=2k+1, y=-2, z=4-5k

c) $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{0} = \frac{z-4}{-5}$ =k

veya $\frac{x-1}{2} = \frac{z-4}{-5}$ =k, y = -2

d) x+y+z=2013 ⇒2k+1-2+4-5k=2013 ⇒ 3k= -2010
⇒ k= -670 ⇒ x=-1339, y= -2, z= 3354
O halde aranan nokta K ise K(-1339, -2, 3354) bulunur.

Örnek:

A(1, 1, -2) , B(3,-4, 11) noktalarından geçen doğrunun kartezyen denklemini bulalım.

Çözüm:

Doğrunun doğrultu vektörü olarak $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ alınabilir.

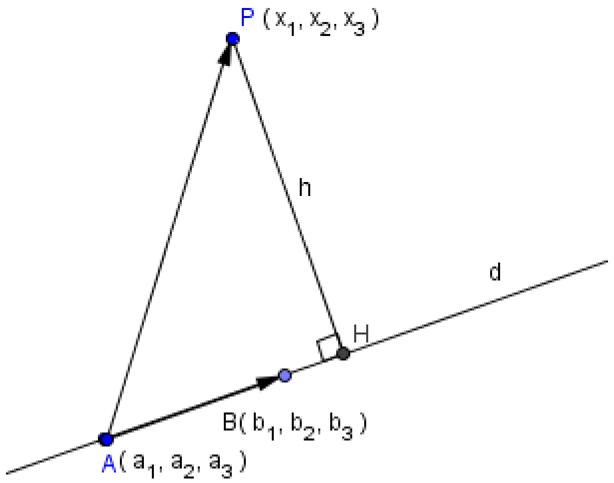
Buna göre doğruyu ister A dan geçen ve doğrultu vektörü $\overrightarrow{AB}$ olan veya B den geçen ve doğrultu vektörü $\overrightarrow{AB}$ olan doğru olarak düşünebiliriz.

$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ =(2, -5, 13)

Örneğin d doğrusunu, A dan geçen ve doğrultu vektörü $\overrightarrow{AB}$ olan doğru olarak düşünelim; buna göre doğrunun kartezyen denklemi;

$\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-5} = \frac{z+2}{13}$ = k olur.

Bir Noktanın Bir Doğruya Olan Uzaklığı:



A dan geçen d doğrusu ile dışındaki bir P(x_1, x_2, x_3) noktası verilsin. Doğru üzerinde keyfi olarak B noktası alalım. $\overrightarrow{AP}$ vektörü ile $\overrightarrow{AB}$ vektörleri arasındaki açı α olsun.

Şekilden görüleceği gibi aranan uzaklık;
$|PH| = h = |\overrightarrow{AP}|.\sin\alpha$ eşitliğinden bulunabilir.

Not 1: Önce cos α yı $\overrightarrow{AP}$ vektörü ile $\overrightarrow{AB}$ vektörlerinin skaler çarpımından bulur sonra sin α yı elde ederiz.

Not 2: Doğru denklemi ; A (a_1, a_2, a_3) den geçen ve doğrultu vektörü $\vec{u}$ =(u_1, u_2, u_3) olsun.
Önce cos α yı , $\overrightarrow{AP}$ ile $\vec{u}$ vektörünün skaler çarpımından bulur sonra sin α yı elde eder ve uzaklığı; h= $|\overrightarrow{AP}|.\sin\alpha$ eşitliğinden bulabiliriz.

Not 3: $|\overrightarrow{AP} \times \vec{u}| = |\overrightarrow{AP}||\vec{u}|.\sin\alpha$ olduğundan

$|PH| = h = \frac{|\overrightarrow{AP} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}$ bulunur.

Örnek:

P(-1, 2, 0) noktasının $\frac{x-2}{2} = \frac{1-y}{3} = z+1$ doğrusuna olan uzaklığı kaç birimdir?

Çözüm :

1. Yol: Doğru üzerinde rastgele iki nokta alalım. Birisi apsisi 2 olan nokta A olsun: A(2, 1, -1) bulunur.

Diğeri de apsisi 0 olan nokta B olsun: B(0, 4, -2) dir.

$\overrightarrow{AP}$ =(-3, 1, 1), $\overrightarrow{AB}$ =(-2, 3, -1)
h= $|\overrightarrow{AP}|.\sin\alpha$,

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AP}|.|\overrightarrow{AB}|} = \frac{6+3-1}{\sqrt{11}.\sqrt{14}} = \frac{8}{\sqrt{11}.\sqrt{14}}$$

$$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{\sqrt{90}}{\sqrt{11}.\sqrt{14}} \Rightarrow h = |\overrightarrow{AP}|.\sin\alpha = \sqrt{11}.\frac{\sqrt{90}}{\sqrt{11}.\sqrt{14}}$$

$\Rightarrow h = \frac{3.\sqrt{5}}{7}$ birim bulunur.

2. Yol: A(2, 1, -1), doğrultu vektörü $\vec{u}$ =(2, -3, 1) dir.
$\overrightarrow{AP}$ =(-3, 1, 1) dir.

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AP}.\vec{u}}{|\overrightarrow{AP}|.|\vec{u}|} = \frac{-6-3+1}{\sqrt{11}.\sqrt{14}} = \frac{-8}{\sqrt{11}.\sqrt{14}}$$

$$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{\sqrt{90}}{\sqrt{11}.\sqrt{14}}$$

h= $|\overrightarrow{AP}|.\sin\alpha \Rightarrow h = \sqrt{11}.\frac{\sqrt{90}}{\sqrt{11}.\sqrt{14}} = \frac{3.\sqrt{5}}{7}$ birim bulunur.

3. Yol: $h = \frac{|\overrightarrow{AP} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}$ olduğundan önce $\overrightarrow{AP} \times \vec{u}$ yu hesaplayalım;

$$\overrightarrow{AP} x \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 4\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 + 7\vec{e}_3$$

$\Rightarrow h = \frac{|\overrightarrow{AP} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|} = \frac{\sqrt{90}}{\sqrt{14}} = \frac{3.\sqrt{5}}{7}$ birim bulunur.

R^3 te (Üç Boyutlu Uzayda) Düzlem:

Uzayda bir düzlemi;

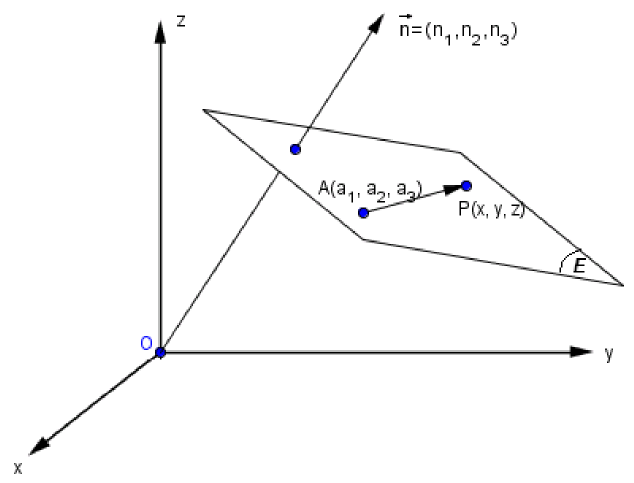
a) Bir noktadan geçen ve bir doğruya (veya bir vektöre) dik olan vektörlerle,

b) Kesişen iki doğruyla,

c) Doğrusal olmayan üç noktayla,

d) Paralel iki doğruyla;

e) Bir doğru ve dışındaki bir noktayla belirtebiliriz.



Uzayda A (a_1,a_2,a_3) noktası ile $\vec{n}$=(n_1,n_2,n_3) vektörü verilmiş olsun. A dan geçen $\vec{n}$ vektörüne dik olan $\overrightarrow{AP}$ vektörleri bir (E) düzleminde bulunur.

Burada $\vec{n}$ vektörüne düzlemin bir **normal vektörü** denir.

E düzleminin denklemini bulmak demek P(x,y,z) noktasının x, y, z koordinatları arasındaki bağıntıyı bulmak demektir.

Dikkat edilirse her durumda $\overrightarrow{AP}$ ile $\vec{n}$ vektörleri birbirine diktir. İşte bu ilişkiyi kullanarak düzlem denklemini elde edebiliriz.

$\overrightarrow{AP} \perp \vec{n} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{AP}.\vec{n}=0}$ ((E) düzleminin vektörel denklemi)

$\overrightarrow{AP} . \vec{n} = 0 \Rightarrow (x-a_1,y-a_2,z-a_3).(n_1,n_2,n_3) = 0$

$\Rightarrow n_1(x-a_1) + n_2.(y-a_2)+n_3(z-a_3)=0$

$\Rightarrow n_1x + n_2y+n_3z -n_1a_1 - n_2a_2-n_3a_3=0$

Burada x , y ve z değişkeninin katsayılarına sırasıyla $a=n_1$, $b=n_2$, $c=n_3$ ve sabit değere de

$d= -n_1a_1 - n_2a_2-n_3a_3$ diyelim. Bu durumda düzlem denklemi 1. dereceden x, y, z değişkenlerine bağlı bir denkleme dönüşür.

$\boxed{ax + by + cz + d = 0}$

((E) düzleminin kartezyen denklemi.)

Not 1: Bu denklemde düzlemin normal vektörü $\vec{n}$=(a,b,c) alınabilir.

Not 2: Denklemin her iki tarafı a≠0 ile bölünerek;

$x + \frac{b}{a}y + \frac{c}{a}z + \frac{d}{a} = 0$, katsayılara sırasıyla a', b' , c' diyelim. Böylece denklemi;

x + a'y +b'z + c' = 0 biçiminde yazarak düzlemin bulunabilmesi için üç katsayının bulunması (yani üç bilinmeyenli üç denklemin çözülmesi) gerekir.

Örneğin bu özellik doğrusal olmayan üç noktadan geçen düzlem denkleminin bulunuşunda kullanılabilir.

Örnek:

A(2, -3, 1) noktasından geçen ve $\vec{n}$=(3, 4, -1) vektörüne (normal vektörü) dik olan düzlem denklemini bulalım.

Çözüm:

Düzleme ait değişken bir nokta P(x, y, z) olsun.

$\overrightarrow{AP} \perp \vec{n} \Rightarrow \overrightarrow{AP}.\vec{n} = 0 \Rightarrow$ (x-2, y+3, z-1).(3,4,-1)=0

$\Rightarrow$ 3x-6+4y+12-z+1=0 $\Rightarrow$ 3x+4y-z+7=0 bulunur.

Örnek:

A(-2, 3, 7) , B(2, -1, 0) ve C(1, 0, -3) noktalarından geçen düzlem denklemini bulalım.

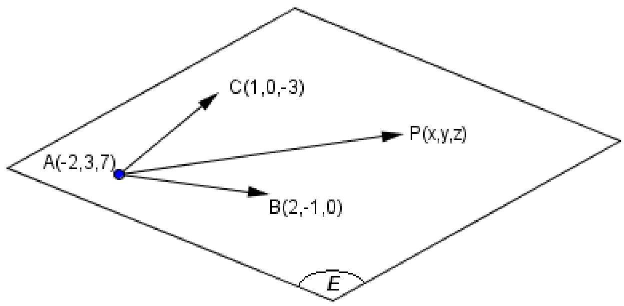
Çözüm:

1. Yol: Düzlem denklemi x+ay+bz+c=0 olsun. Düzlem bu üç noktadan geçtiği için; her noktanın koordinatları denklemi sağlamalıdır:

-2+3a+7b+c=0
2-a+c=0
1-3b+c=0

Denklem çözülürse a=1, b=0, c=-1 bulunur.
O halde aranan düzlem denklemi x+y-1=0 olarak elde edilir.

2. Yol:



Şekilde
$\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AB}$ ve $\overrightarrow{AC}$ vektörleri lineer bağımlıdır (veya vektörlerin üzerine kurulu paralelyüzün hacmi 0 dır).

Bu da bizi vektörlerin bileşenlerini alt alta yazarak elde edilen deteminant değerinin 0 olması gerektiği sonucuna götürür.

$$\begin{vmatrix} x+2 & y-3 & z-7 \\ 4 & -4 & -7 \\ 3 & -3 & -10 \end{vmatrix} = 19(x+2)+19(y-3)=0$$

$\Rightarrow$ x+y-1=0 bulunur.

Örnek:

Birbirine paralel; d_1: $-x=y+1=\frac{z-2}{3}$ ve

d_2: $3-3x=3y-9=z$ doğruları veriliyor.

a) Bu iki doğrunun belirttiği düzlemi bulalım.

b) Bulunan düzlemin koordinat eksenlerini kestiği noktalar A, B, C ise A(ABC) alanını bulalım.

Çözüm:
1. Yol: Doğrulardan birisinde rastgele iki nokta (örneğin d_1 üzerinde) A ve B noktaları, diğeri üzerinde de C noktası alalım.

d_1 doğru denkleminde;
x=0 için A(0, -1, 2)
z=8 için için B(-2, 1, 8)

d_2 doğru denkleminde;
x=0 için C(0, 4, 3) olur.

Bu durumda paralel doğruların belirttiği düzlemi bulmak, A, B, C noktalarından geçen düzlem denklemini bulmak demektir.

Bir önceki problemde yaptığımız işlemleri yapabiliriz. Düzlemin herhangi bir noktası P(x, y, z) olsun.

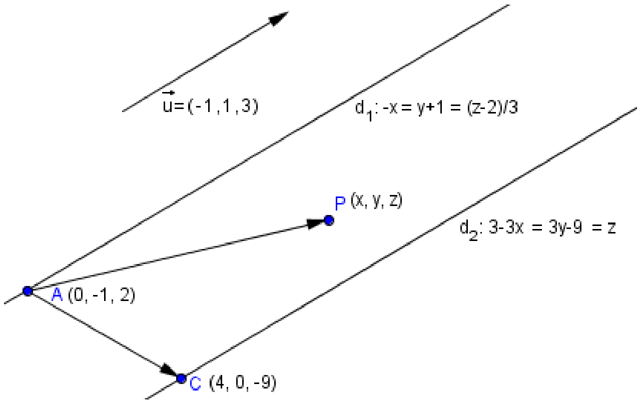
$\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AB}$ ve $\overrightarrow{AC}$ vektörleri lineer bağımlıdır (veya vektörlerin üzerine kurulu paralelyüzün hacmi 0 dır).

Bu da bizi vektörlerin bileşenlerini alt alta yazarak elde edilen determinant değerinin 0 olması gerektiği sonucuna götürür.

$$\begin{vmatrix} x & y+1 & z-2 \\ -2 & 2 & 6 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -28x-(-2)(y+1)-10(z-2)=0$$

$\Rightarrow$ 14x-y+5z-11=0 bulunur.

2. Yol:



d_1 üzerinde A(0, -1, 2) ve d_2 üzerinde C(4, 0, -9) noktalarını alalım.

Düzlemin herhangi bir noktası P(x, y, z) olsun.

$\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AC}$ ve $\vec{u}$ vektörleri lineer bağımlıdır (veya vektörlerin üzerine kurulu paralelyüzün hacmi 0 dır).

Bu da bizi vektörlerin bileşenlerini alt alta yazarak elde edilen determinant değerinin 0 olması gerektiği sonucuna götürür.

$$\begin{vmatrix} x & y+1 & z-2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -11 \end{vmatrix} = -14x-(-1)(y+1)-5(z-2)=0$$

$\Rightarrow$ 14x-y+5z-11=0 bulunur.

b) Düzlemin x eksenini kestiği A noktasını bulmak için y=z=0 koyalım A(11/14,0,0)

Düzlemin y eksenini kestiği B noktasını bulmak için x=z=0 koyalım B(0,-11,0)

Düzlemin z eksenini kestiği C noktasını bulmak için x=y=0 koyalım C(0,0,11/5)

$\overrightarrow{AB}$ =(-11/14, -11, 0)

$\overrightarrow{AC}$ =(-11/14, 0, 11/5)

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ =

$$\begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -\frac{11}{14} & -11 & 0 \\ -\frac{11}{14} & 0 & \frac{11}{5} \end{vmatrix} = (-\frac{11}{14})(-\frac{11}{14.5}) \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 14 & 0 \\ 5 & 0 & -14 \end{vmatrix} = \frac{11^2}{14^2.5}(-14^2\vec{e}_1 + 14\vec{e}_2 - 5.14\vec{e}_3)$$

$$A(ABC) = \left| \frac{\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}}{2} \right| = \frac{121.\sqrt{322}}{140} \text{ birim kare}$$

bulunur.

Örnek:

d_1: $\frac{x-1}{2}$ = y+1= 3-z ve

d_2: $\frac{x-1}{3}$ = y+1= z-3 doğruları veriliyor.

Bu doğruların bir noktada kesiştiğini ispatlayarak doğruların belirttiği düzlemi bulalım.

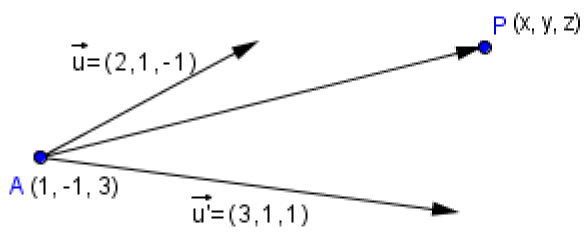
Çözüm:
İki denklemi ortak çözelim:

$\frac{x-1}{2}$ = y+1= 3-z = k $\Rightarrow$ x=2k+1, y=k-1, z=3-k

Bu değerleri diğer denklemde yerine koyalım;

$\frac{2k}{3}$ = k = -k bu üçlü orantıyı sadece k=0 sağlar.

İlk denklemde yerine konursa kesişim noktası A ise; A(1, -1, 3) olur.Doğrulardan her birinden birer tane nokta bulalım;



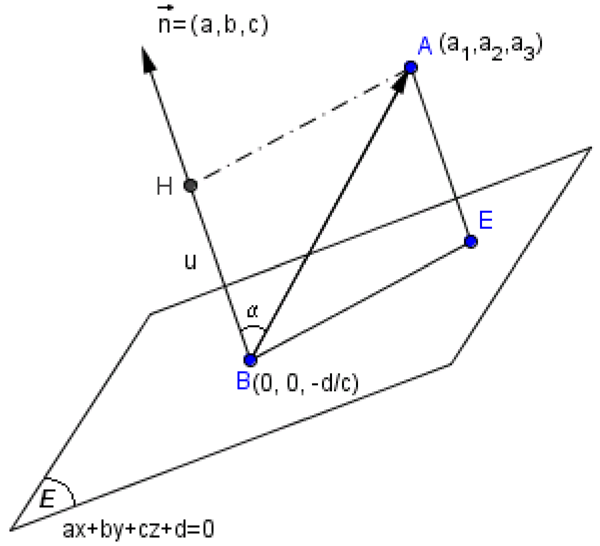
Düzleme ait bir nokta P(x,y,z) olsun. Şekilden de görüldüğü gibi; $\overrightarrow{AP}$, $\vec{u}$ ve $\vec{u}\,'$ vektörleri lineer bağımlıdır .

Bu da bizi vektörlerin bileşenlerini alt alta yazarak elde edilen determinant değerinin 0 olması gerektiği sonucuna götürür.

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2(x-1)-5(y+1)-(z-3)=0$$

$\Rightarrow$ Aranan düzlem denklemi; 2x-5y-z-4=0 dır.

Bir Noktanın Bir Düzleme Uzaklığı:



Uzayda verilen bir (E) düzleminin denklemi ax+by+cz+d=0 ve bir A(a_1,a_2,a_3) noktası verilsin.Düzlem üzerinde bir B noktası alalım, örneğin apsis ve ordinatı 0 olsun, kotu z=-d/c yani B(0,0,-d/c) olsun.

Düzlemin normal vektörü $\vec{n}$=(a,b,c) dir.
A dan düzleme inilen |AE| uzaklığı aynı zamanda $\overrightarrow{BA}$ nın $\vec{n}$ üzerindeki dik izdüşüm uzunluğudur.

$$u = \left|\,|\overrightarrow{BA}|\,|\cos\alpha|\,\right| = |\overrightarrow{BA}|\left|\frac{\overrightarrow{BA}\,.\,\vec{n}}{|\overrightarrow{BA}|\,|\vec{n}|}\right|$$

$$= \left|\frac{\overrightarrow{BA}\,.\,\vec{n}}{|\vec{n}|}\right| = \left|\frac{(a_1,\ a_2,\ a_3 + d/c\ ).(a,b,c)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right|$$

$$\boxed{u = \frac{|\ a_1.a + a_2.b + a_3.c + d\ |}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$ bulunur.

Örnek:
A(1, -3, a+2) noktasının 2x –2y + z = 15 düzlemine 7 birim uzaklıkta olabilmesi için a kaç olmalıdır?

Çözüm:

$$u = \frac{|2 + 6 + a+2 - 15|}{\sqrt{4+4+1}} = 7 \Rightarrow \ |a-5| = 21 \Rightarrow a = 26$$

veya a = -16 bulunur.

Paralel İki Düzlem Arasındaki Uzaklık:

(E) ve (F) paralel iki düzlem olsun.

Bu düzlemlerin normal vektörlerini aynı alabiliriz.

(E) : $ax+by+cz+d_1=0$

(F) : $ax+by+cz+d_2=0$

Düzlemlerden biri üzerinde alınan herhangi bir noktanın diğer düzleme olan uzaklığı, bu iki düzlem arasındaki uzaklıktır.

Örneğin (E) üzerinde A(0,0,$-\frac{d_1}{c}$) noktasının (F) düzlemine olan uzaklığını bulalım.

$$u = \frac{|0+0+c(-\frac{d_1}{c})+d_2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \Rightarrow \boxed{u = \frac{|d_2-d_1|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$

bulunur.

Örnek:
2x-y+3z=6 ile 3y-6x-9z=a+1 düzlemleri arasındaki uzaklık $\frac{5}{\sqrt{14}}$ birim ise a kaçtır?

Çözüm:
İkinci denklemi –3 e bölelm:
2x-y+3z+a+1=0 olur.

$\dfrac{5}{\sqrt{14}} = \dfrac{|a+1-(-6)|}{\sqrt{4+1+9}} = \dfrac{|a+7|}{\sqrt{14}} \Rightarrow$ a= -2 veya a= -12 bulunur.

Örnek:

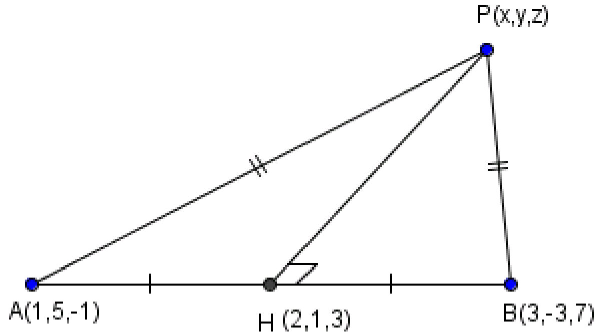
a) Uzayda A(1,5,-1) , B(3,-3,7) noktalarına eşit uzaklıkta kaç tane nokta bulunur.Bu noktaların geometrik yeri nedir?

b) Uzayda A(1,5,-1) , B(3,-3,7), C(0,1, -1) noktalarına eşit uzaklıkta kaç tane nokta bulunur.Bu noktaların geometrik yeri nedir?

c) Uzayda A(1,5,-1) , B(3,-3,7), C(0,1, -1), D(1,0,-1) noktalarına eşit uzaklıkta kaç tane nokta bulunur.Bu noktaların geometrik yeri nedir?

Örnek:

a)



1. Yol:

$|PA|=|PB| \Rightarrow$

$\sqrt{(x-1)^2+(y-5)^2+(z+1)^2} = \sqrt{(x-3)^2+(y+3)^2+(z-7)^2}$

$\Rightarrow (x-1)^2+(y-5)^2+(z+1)^2 = (x-3)^2+(y+3)^2+(z-7)^2$

$\Rightarrow$ x-4y+4z-10 = 0 bulunur.

2. Yol:

[AB] nın ortası H(2, 1, 3) tür.

$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{HP} \Rightarrow \overrightarrow{AB} . \overrightarrow{HP} = 0$

$\Rightarrow$ (2,-8,8).(x-2,y-1,z-3)=0 $\Rightarrow$ 2x-4-8y+8+8z-24=0

$\Rightarrow$ x-4y+4z-10 = 0 bulunur.

O halde bu iki noktaya eşit uzaklıktaki noktaların geometrik yeri bir düzlemdir. ([AB]nın orta dikme düzlemidir; yani aranan şarta uygun sonsuz çoklukta nokta bulunur.

b) A ve B ye eşit uzaklıkta olan noktaların geometrik yeri [AB] nın orta dikme düzlemi; x-4y+4z-10 = 0 dir.

Benzer şekilde [AC] nin orta dikme düzlemini de bulalım:

Düzleme ait bir nokta P(x,y,z) olsun.

[AC] nın ortası K(1/2, 3, -1) ise; $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{KP} \Rightarrow$

$\overrightarrow{AC} . \overrightarrow{KP} = 0 \Rightarrow$ 2x+8y-13=0 bulunur.

Aranan geometrik yer bu iki düzlemin arakesit doğrusudur.

Doğru denklemini bulmak için ortak çözüm yapalım.

2/ x-4y+4z-10 = 0
2x+8y-13=0

2x-8y+8z-20 = 0
2x+8y-13=0

x = 33/4 – 2z, y = -7/16 –z/2

O halde aranan doğru denklemi;

$\dfrac{x - 33/4}{-2} = \dfrac{y + 7/16}{-1/2} = z$ dir.

c) [CD] nın orta dikme düzlemi ile yukarıda bulduğumuz doğrunun (veya üç orta dikme düzlemlerinin) kesişim noktası aranan tek noktadır.

Düzleme ait bir nokta P(x,y,z) olsun.

[CD] nın ortası L(1/2, 1/2, -1) dir.

$\overrightarrow{CD} \perp \overrightarrow{LP} \Rightarrow \overrightarrow{CD} . \overrightarrow{LP} = 0 \Rightarrow$ x-y=0 bulunur.

Bulduğumuz düzlem denklemlerini alt alta yazalım.

x-4y+4z-10 = 0
2x+8y-13=0
x-y=0

Denklem sistemi çözülürse aranan tek noktanın koordinatları (noktaya M diyelim);

M(13/10, 13/10, 139/40) olarak bulunur.

Örnek:

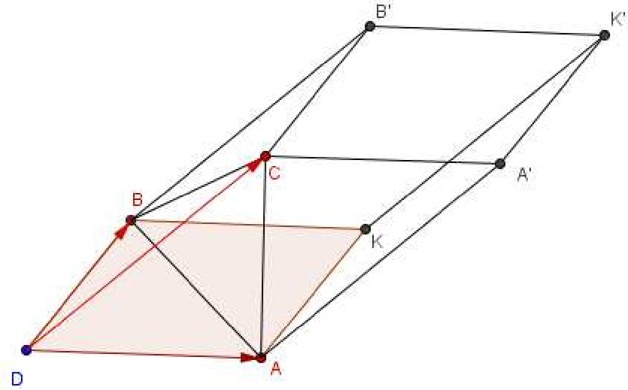
Uzayda A(1,0,1), B(-1,2,0), C(2,1,1) ve D(0,0,7) noktaları veriliyor.

a) ABCD dörtyüzlüsünün (uzay dörtgeninin veya piramidinin) hacmini,

b) D noktasının (ABC) düzlemine olan uzaklığını (piramidin ABC tabanına ait yüksekliğini) bulalım.

Çözüm:

a) Aşağıdaki şekilden görüldüğü gibi ABCD dörtyüzlüsünün (ABD) tabanı, $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DC}$ vektörleri üzerine kurulu paralelyüzün tabanının yarısıdır. Ayrıca paralelyüzün yüksekliği ile ABCD uzay dörtgeninin (ABD tabanına ait) yüksekliği aynıdır. Buna göre ABCD uzay dörtgeninin hacmi paralelyüzün hacminin 1/6 sıdır.



$$H(ABCD) = \frac{|[\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}]|}{6}$$

$$= \frac{1}{6} . \left| \begin{vmatrix} -1 & 0 & 6 \\ 1 & -2 & 7 \\ -2 & -1 & 6 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{6} . |-25| = \frac{25}{6} \text{ birim küp}$$

bulunur.

b)
1. Yol: (ABC) düzleminin denklemini bulalım;

A(1,0,1), B(-1,2,0), C(2,1,1) ve düzleme ait değişken bir nokta P(x,y,z) olsun.

$\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AB}$ ve $\overrightarrow{AC}$ vektörleri lineer bağımlıdır (veya vektörlerin üzerine kurulu paralelyüzün hacmi 0 dır).

Bu da bizi vektörlerin bileşenlerini alt alta yazarak elde edilen determinant değerinin 0 olması gerektiği sonucuna götürür.

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x-y-4z+3=0$$

Şimdi de D(0,0,7) noktasının düzleme olan uzaklığını hesaplayalım:

$$u = \frac{|0-0-28+3|}{\sqrt{1+1+16}} = \frac{25}{\sqrt{18}} \text{ birim bulunur.}$$

2.Yol:

$$A(ABC) = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = \frac{|(1,-1,-4)|}{2} = \frac{\sqrt{18}}{2}$$

$$H(ABCD) = \frac{A(ABC).u}{3} \text{ olduğundan;}$$

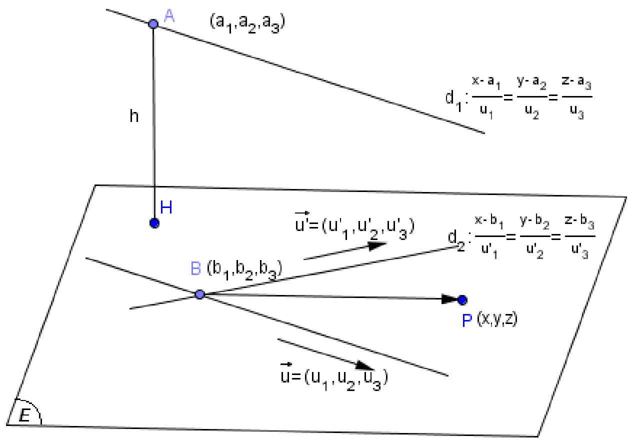
$$\frac{25}{6} = \frac{\frac{\sqrt{18}}{2} . u}{3} \Rightarrow u = \frac{25}{\sqrt{18}} \text{ birim bulunur.}$$

Aykırı Doğrular:

Uzayda aynı düzlemde olmayan ve kesişmeyen doğrulara denir.

İki Aykırı Doğru Arasındaki Uzaklık:

Uzayda d_1 ve d_2 gibi iki aykırı doğru verilsin. d_2 nin üzerindeki herhangi bir B noktasından d_1 doğrusuna çizilen paralel doğru ile d_2 nin oluşturduğu düzlem (E) olsun. d_1 doğrusu (E) düzlemine paraleldir. Dolayısıyla d_1 üzerindeki herhangi bir A noktasının düzleme olan h=|AH| uzaklığı, aykırı doğrular arasındaki uzaklıktır.



(E) düzlemini bulmak için $\overrightarrow{BP}$, $\vec{u}$, $\vec{u'}$ vektörlerinin lineer bağımlı olmasını kullanabiliriz.

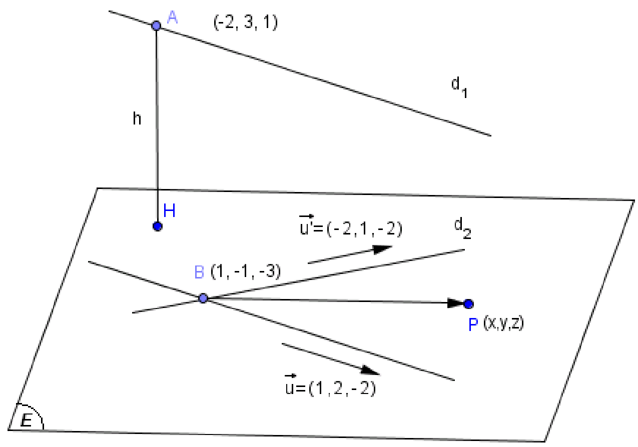
Yani (E) düzlemini, $\overrightarrow{BP}$, $\vec{u}$, $\vec{u'}$ vektörlerinin bileşenlerini alt alta yazarak elde edilen deteminant değerini 0 a eşitleyerek bulabiliriz.

Örnek:

d_1: $x+2 = \frac{y-3}{2} = \frac{1-z}{2}$ ve d_2: $\frac{1-x}{2} = y+1 = \frac{-3-z}{2}$ aykırı doğruları arasındaki en kısa uzaklığı bulalım.

Çözüm:

d_2 nin üzerindeki herhangi bir B(1, -1, -3) noktasından d_1 doğrusuna çizilen paralel doğru ile d_2 nin oluşturduğu düzlem (E) olsun. d_1 doğrusu (E) düzlemine paraleldir. Dolayısıyla d_1 üzerindeki herhangi bir A noktasının düzleme olan h=|AH| uzaklığı, aykırı doğrular arasındaki uzaklıktır.



A(-2, 3, 1) alalım. Önce (E) düzleminin denklemini bulalım.

Düzlemde herhangi bir nokta P(x,y,z) olmak üzere; $\overrightarrow{BP}$ =(x-1, y+1,z+3) ile $\vec{u}$ =(1, 2, -2) ve $\vec{u}'$ =(-2,1,-2) vektörleri lineer bağımlıdır.

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z+3 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2x+6y+5z+23=0$$

A(-2,3,1) noktasının bu düzleme olan uzaklığı aranan h uzaklığıdır.

$$h = \frac{|a_1.a + a_2.b + a_3.c + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|4+18+5+23|}{\sqrt{4+36+25}}$$

$= \frac{50}{\sqrt{65}}$ birim bulunur.

İki Düzlemin Birbirine Göre Durumları:

(E) : ax+by+cz+d=0 düzlemi ile;

(E’) : a’x+b’y+c’z+d’=0 düzlemi verilsin.

Bu iki düzlemi belirleyen denklemlerin oluşturduğu (üç bilinmeyenli iki denklem) denklem sisteminin,

a) İki denklemden biri diğerinin bir katıdır (aslında üç bilinmeyenli tek denklem vardır)
⇔Sonsuz çözümü olur
⇔ (E) ile (F) çakışıktır.

b) İki denklemden biri diğerinin katı olmadığı halde
⇔Sonsuz çözümü olur
⇔ (E) ile (F) bir doğru boyunca kesişir.

c) Denklem sisteminin çözümü yoktur.
⇔ (E) ile (F) birbirine paraleldir.

Not 1: Düzlemler çakışık ya da paralel ise normal vektörleri paraleldir.

Not 2: Düzlemler kesişiyorlarsa normal vektörleri paralel değildir.

Örnek:
(E): x + 2y + z = 0
(F): 2x + y - 2z = 1
(G): x - y + 2z = 1

a) Düzlemlerinin –varsa- kesişim kümesini bulalım.

b) (F) ile (G) düzlemlerinin birbirlerine göre durumunu inceleyerek kesişim kümesini bulalım.

Çözüm:
Sırasıyla (E) , (F) ve (G) düzlemlerinin normal vektörlerine $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$, $\overrightarrow{n_3}$ diyelim.

$\overrightarrow{n_1}$ =(1, 2, 1), $\overrightarrow{n_2}$ =(2,1,-2), $\overrightarrow{n_3}$ =(1,-1,2)

a) Bu üç vektörden herhangi ikisi paralel olmadığından, düzlemlerden herhangi ikisi paralel ya da çakışık olamaz.Bu durumda üç düzlem K gibi tek bir noktada kesişir. K yı bulmak için denklem sistemini çözmemiz gerekir.

(E): x + 2y + z = 0
(F): 2x + y - 2z = 1
(G): x - y + 2z = 1

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -15$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -10$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -3$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{2}{3},\ y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{1}{5},\ z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 0$$

K($\frac{2}{3}$, $\frac{1}{5}$, 0) bulunur.

b)
(F): 2x + y - 2z = 1
(G): x - y + 2z = 1

Üç bilinmeyenli iki denklemi çözmek için, bilinmeyenlerden biri cinsinden (örneğin z cinsinden) bulalım, z li terimleri sağ tarafa atalım.

2x + y = 2z+1
x - y = 1- 2z

3x=2 ⇒ x = 2/3, y =2z – 1/3

Buradan;

$$\frac{x - 2/3}{0} = \frac{y + 1/3}{2} = z \text{ bulunur.}$$

Bu da A(2/3, -1/3, 0) noktasından geçen ve doğrultu vektörü $\vec{u}$ =(0, 2, 1) olan doğruyu belirtir.

İZMİR FEN LİSESİ UZAY ANALİTİK GEOMETRİ
ÇALIŞMA SORULARI

(Uzayda Doğru ve Düzlem) (Kasım 2012)

01. A(2,3,4) ve B(-1,2,5) noktalarından geçen doğru denklemini bulunuz.

02.
d: $\frac{x-3}{5} = \frac{y+1}{a} = \frac{z+1}{3}$ ile
k: $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{b}$ doğruları veriliyor.
a) d//k ise a ve b kaçtır?
b) d$\perp$k ise a+b kaçtır?

03.
d: $x-1 = \frac{y+1}{a} = \frac{1-z}{2}$ ile
k: $\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{2} = -z-1$ doğruları arasındaki açının cosinüsü kaçtır?

04.
d: $x+1 = \frac{y-2}{m} = \frac{z-3}{2}$ ile
k: $\frac{x-1}{2} = y+1 = \frac{-z-2}{3}$ doğruları arasındaki açı 120° ise m kaçtır?

05. A(3,2,1) noktasının
$\frac{x+3}{2} = 1-y = \frac{-z-2}{2}$ doğrusuna olan uzaklığı kaç birimdir?

06. $x-3 = \frac{y+1}{0} = -z$ doğrusu ile
($x=2+\lambda$, $y=4\lambda-3$, $z=1$) doğrusu arasındaki açı kaç derecedir?

07.
$\frac{x-1}{4} = -y-2 = \frac{z}{2}$ doğrusu ile 3x-2y-z+5=0 düzleminin varsa kesişim noktasını bulunuz.

08. 2x-5y+z+2=0 ve 3x+2y-4z=1 düzlemlerinin arakesit doğrusunu bulunuz.

09.
d: $-x-2 = \frac{y-1}{m+1} = \frac{z}{2}$ doğrusu
(E): x+2y-z+4=0 düzlemine
a) Paralel olması için m kaç olmalıdır?
b) Dik olması için m kaç olmalıdır?

10.
d: $\frac{x+1}{2} = \frac{1-y}{3} = z+2$ doğrusu ile
(E): 4x+y+2z+3=0 düzlemi arasındaki açının kosinüsü kaçtır?

11. 2x+y-7z+11=0 ve 5x-2y+5z=12 düzlemlerinin arasındaki açılardan dar olanın ölçüsü kaç derecedir?
12. A(3, -1,m+1) noktasının 4x-y+8z=2 düzlemine olan uzaklığı 3 birim ise m kaçtır?

13. 4x-y+8z=2 düzlemine paralel ve orijinden 4 birim uzaklıkta bulunan düzlem denklem(ler)ini bulunuz.

14. A(1,-1,2) noktasından geçen ve 3x-2y+z=5 düzlemine dik olan doğru denklemini bulunuz.

15. A(-1,5,0) noktasından geçen ve (x,y,z)=(1,1,2)+t(-1,3,0) doğrusuna dik olan ve x+y-4z+2=0 düzlemine paralel olan doğru denklemini bulunuz.

16. x+y+z+1=0 ile 2x-y+z=0 düzlemlerinin arakesitinden ve A(1,-1,3) noktasından geçen düzlem denklemini bulunuz.

17. x=y=z ve $x-1 = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{3}$ doğrularına paralel olan ve A(-2,3,4) noktasından geçen düzlem denklemini bulunuz.

18. $x-1 = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{3}$ doğrusuna paralel olan olan, A(-3,1,1) ve B(-1,3,-1) noktalarından geçen düzlem denklemini bulunuz.

19. a) A(1,2,3), B(1,-1,2) , C(-2,2,1) noktalarından geçen düzlem denklemini bulunuz.
b) A(a,b,a), B(0,a,b) ve C(b,0,a) noktalarından geçen düzlem denklemini bulunuz.

20. $x=\frac{y}{3}=\frac{z}{3}$ doğrusu ile $\frac{x-1}{a} = 1-y = \frac{z-3}{0}$ denklemleriyle verilen doğruların kesişmesi için a kaç olmalıdır?Sonra kesişim noktasını bulunuz.

21. Uzayda A(2,-1,3) ve B(3,1,-1) noktalarından eşit uzaklıkta bulunan noktaların geometrik yerini bulunuz.

22.
$\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{5} = \frac{z+6}{13}$ ve
$\frac{x-4}{9} = \frac{y-3}{5} = \frac{z-7}{4}$ doğrularının düzlemsel olduklarını gösterip bu düzlemin denklemini bulunuz.

23.
$\frac{x-3}{4} = \frac{y-a}{-2} = \frac{z}{b}$ doğrusu A(-2,1,5) noktasından geçtiğine göre a ve b kaç olmalıdır?

24.
$\frac{x+m-1}{4} = \frac{y-5}{5} = \frac{2m-z}{2}$ doğrusu Oz eksenini kestiğine göre m reel sayısını ve kesişim noktasını bulunuz.

25. $\frac{x+2}{2} = -3y = \frac{z-1}{m}$ ve $\frac{x+1}{5} = \frac{1-y}{2} = 2z$ doğruları m nin hangi değeri için kesişir.Sonra kesişim noktasını bulunuz.

İzmir Fen Lisesi Matematik Zümresi-Kasım 2012

Bu dosyayı
http://www.ifl.k12.tr/projedosyalar/dosyalar.htm
adresinden indirebilirsiniz.