MANTIK ÇALIŞMA SORULARI:

1. Aşağıdaki denklikleri, önermelere ait özellikler yardımıyla ispat ediniz.

a) $(p\vee q)'\vee (p\Rightarrow q)'\equiv q'$
b) $(q\Leftrightarrow p')'\wedge p\equiv p\wedge q$
c) $(p\Leftrightarrow q)'\equiv p\Leftrightarrow q'\equiv p'\Leftrightarrow q$
d) $[(p\vee q)\Rightarrow(p\wedge q)]\equiv p\Leftrightarrow q$
e) $[p\vee(q\vee r)]'\wedge(p'\vee q)'\equiv 0$
f) $[p\Rightarrow(q\Rightarrow r)]\equiv[(p\wedge r')\Rightarrow q']$
g) $[(p\Rightarrow q)\Rightarrow(p\wedge q)]\equiv p$
h) $[(p\Rightarrow q)\Rightarrow p]\equiv p$
ı) $(p\wedge q)\vee[q\Rightarrow(p'\wedge q)]\equiv 1$
i) $\{[(p'\Rightarrow q)\wedge p]\Rightarrow q'\}\equiv(p\wedge q)'$
j) $[p\Leftrightarrow(p'\wedge q)]\equiv(p\vee q)'$
k) $[p\Rightarrow(q\Rightarrow r)]\equiv[(p\wedge r')\Rightarrow q']$
l) $\left[p\vee\left(q\vee r\right)\right]'\wedge\left(p'\vee q\right)'\equiv 0$

2. Aşağıdaki önermeleri indirgeyerek, en sade biçimde yazınız.

a) $(p\vee q)\wedge(p\wedge q)'$
b) $(p\wedge q)'\vee q$
c) $p\Rightarrow(q\Rightarrow p)$
d) $[(p\Rightarrow q)\wedge q']\Rightarrow p'$
e) $p\wedge(p\Rightarrow q)$
f) $p\Rightarrow(p'\Leftrightarrow p)$
g) $(p\wedge q)'\vee(p\Rightarrow q)'$
h) $[p\Leftrightarrow(p'\vee q)]\Rightarrow(q'\Rightarrow p)$
ı) $(p\Rightarrow q)'\vee (p\Rightarrow q')'$
i) $(p\Rightarrow q)\wedge(q\vee p)$
j) $(p'\Rightarrow q')\wedge(q'\Rightarrow p)$
k) $(p'\vee q')'\vee(p\wedge q')$
l) $(p'\Rightarrow q)\Rightarrow((p'\Rightarrow q')'$
m) $[p'\wedge(p\Rightarrow q)']\vee(p\Rightarrow q)$
n) $[(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow r)]\Rightarrow(p\Rightarrow r)$
o) $[(p\wedge q)\Rightarrow(p\Rightarrow q)]'$
ö) $\{[r\Rightarrow(p'\vee q)]\Rightarrow(p\wedge r')\}\wedge(p\vee q)$
p) $[(p\wedge q')\vee(p'\Rightarrow 1)]\Rightarrow(q\Rightarrow 0)$
r) $(p\Leftrightarrow q)\wedge(p'\Rightarrow q)$
s) $[p'\Rightarrow(q'\Rightarrow 1)']'\Leftrightarrow(p\wedge q')$
ş) $(p'\Leftrightarrow 1)\wedge[(q'\Rightarrow 0)\Rightarrow(p'\Rightarrow q)]$
t) $\left(p'\Rightarrow q'\right)\wedge\left(q'\Rightarrow p\right)$

3. Aşağıdaki önermelerin karşıtını, tersini, karşıt-tersini yazıp sonucu indirgeyiniz.

a) $[(p\wedge q')\Rightarrow q]\Rightarrow(p'\vee q)$
b) $(p'\Rightarrow q)\Rightarrow(q\Rightarrow p')$
c) $[(p\Rightarrow q')\wedge p]\Rightarrow(p'\Leftrightarrow q)$

İzmir Fen Lisesi

4.Aşağıdaki bileşik önermelerin değillerini bulunuz.

a) $[(\exists x,\ 2x-1\leq 0)\Rightarrow(\forall x, x^2+5>0)]'$
b) $(p\Leftrightarrow q')\wedge(p\Rightarrow r)$
c) $(\exists x,\ x^2+3x-1<0)\vee(\forall x,\ x^2-x\geq -10)$
d) $(p\Rightarrow q)\vee(p'\Rightarrow q)$

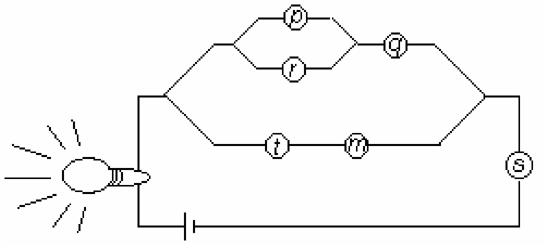
5. Aşağıda verilen denkliklerden faydalanarak, karşılarındaki bileşik önermelerin doğruluk değerlerini bulunuz.

a) $r'\vee(p\Rightarrow q')\equiv 0$ ise $p'\vee(q\Rightarrow r')$
b) $p\Rightarrow(q\Rightarrow r')\equiv 0$ ise $(p'\Leftrightarrow r)\wedge q'$
c) $r\wedge(q\wedge p)\equiv 1$ ise $p\vee q\Rightarrow r'$
d) $(p\wedge r')\Rightarrow(q\Rightarrow p')\equiv 0$ ise $(r\Rightarrow q)\Leftrightarrow p$
e) $p\Leftrightarrow q\equiv 1$ ise $(p\Leftrightarrow r)\Leftrightarrow(q\Leftrightarrow r)$
f) $(p'\Rightarrow q)\vee r\equiv 0$ ise $(p\wedge q')\Rightarrow(r\vee q)$
g) $(p\wedge q')\Rightarrow((p\wedge r)'\equiv 0$ ise $[(p'\Leftrightarrow q)\Rightarrow r]\vee(p\vee r)$
h) $p\vee(q\Rightarrow r)\equiv 0$ ise $[p'\Rightarrow(q\vee r)]\Leftrightarrow(p\vee r)$
ı) $r\wedge(q'\Rightarrow p)'\equiv 1$ ise $[p\wedge(q\Rightarrow r)]\Leftrightarrow[(p'\vee r)\wedge q']$
i) $p\Rightarrow\{[q'\vee(p\wedge q')]\Rightarrow r'\}\equiv 0$ ise $[(p\wedge r')\vee(q'\vee r)]\Rightarrow[(p\Rightarrow r)\wedge q']$
j) $(p'\Rightarrow r')'\Rightarrow q\equiv 0$ ise $(p'\vee s)\Rightarrow\{[(q\wedge s)\vee r']\Rightarrow s\}$
k) $\{(q'\Rightarrow p')\vee[q\vee(r\Leftrightarrow p)]\}'\equiv 1$ ise $[r\wedge(q'\vee p)]\Rightarrow[q\vee(p'\Leftrightarrow q)]$
l) $p\Rightarrow(q'\wedge r)\equiv 0$ ise $[q\Leftrightarrow(p\Rightarrow s)]'\wedge[(s'\Rightarrow q)\vee r]$

6. Aşağıdaki bileşik önermelere karşılık gelen elektrik devresini çiziniz, devreden akımın geçip geçmediğini araştırınız.

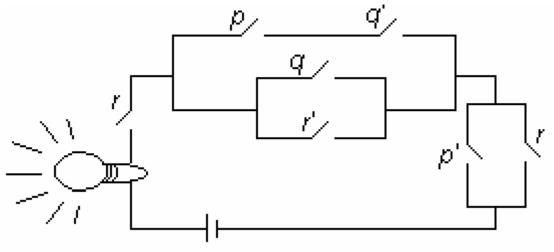
a) $0\vee(1\wedge 0)\vee[(1\wedge 1)\wedge(1\wedge 0)]$
b) $[(0\Rightarrow 1)\Rightarrow 1]\Rightarrow 1$
c) $[(p\wedge q')\Rightarrow r']\Rightarrow(p'\Rightarrow r)$
d) $[(r\Rightarrow q)\Leftrightarrow p]'\wedge(r'\vee p)$

7.



Şekildeki elektrik devresine karşılık gelen bileşik önermesini yazınız.

8.



Şekildeki elektrik devresine karşılık gelen bileşik önermeyi yazınız. Sadeleştirerek yerine geçebilecek en ekonomik devreyi bulunuz.

9.Aşağıdaki bileşik önermelerin totoloji olup olmadığını araştırınız.

a) $[(p\Rightarrow q')\wedge(r\Rightarrow q)\wedge r]\Rightarrow p'$
b) $[(p\Leftrightarrow q)\wedge q]\Rightarrow p$
c) $p\Rightarrow[(p\wedge q)\Leftrightarrow q]$

10.Aşağıdaki bileşik önermelerin doğruluk tablolarını yapınız.

a) $[q'\wedge(p\Rightarrow r')]\vee(p\Leftrightarrow q)$
b) $p'\Rightarrow[(q\Rightarrow p')\vee(q'\Rightarrow p)]$
c) $[(p\vee q')\Rightarrow(r\wedge p')]\wedge(r'\Leftrightarrow q)'$

11. Aşağıdaki önermelerin totoloji olduğunu ispat ediniz.

a)$(p\Rightarrow q)\Leftrightarrow(p\wedge q')'$
b)$(p\wedge q)\vee[q\Rightarrow(p'\wedge q)]$
c) $(p\wedge q)\Rightarrow(p\Leftrightarrow q)$

12. $p\Rightarrow q$ nun $(\mathrm{p}\wedge \mathrm{r})\Rightarrow(q\wedge r)$ yi mantıksal gerektirdiğini gösteriniz.

13. $[p\Rightarrow(q\vee r')]\Rightarrow(r\Rightarrow p')'$ önermesinin $p\wedge r$ yi mantıksal gerektirdiğini gösteriniz.

14. $p\Rightarrow(q\vee r)$ nin $(\mathrm{p}\Rightarrow \mathrm{q})\vee r$ yi mantıksal çift gerektirdiğini gösteriniz.

15. Aşağıdaki önermelerin doğruluk değerlerini ve değillerini bulunuz.

a) $(p\Leftrightarrow q')\wedge(p\Rightarrow r)$
b) $[(p\Rightarrow q)\vee(\forall x\in R,\ x^2+1\neq 0)$ $\in$
c) $(\forall x\in R,\ 2x-1>0)\Rightarrow(\exists x,\ x\neq 0)$
d) $(\forall x\in N,\ 3\mid x^3-x)\Rightarrow(\exists x,y\in R,\ x^y=y^x)$
e) $(\exists x\in R,\ x^2\leq x)\vee$
$(\forall x,y\in R,\ x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y))$
f) $(\forall x\in R,\ x<5\Rightarrow x^2<25)$

İspat Yöntemleri:
Not: $p\Rightarrow q$ gibi bir teoremi ispatlamak için;
i) p önermesinin doğru olmasından hareketle q önermesinin de doğru olduğunu göstererek ***doğrudan ispat*** yöntemiyle ispat edebiliriz.

ii) $p\Rightarrow q\equiv q'\Rightarrow p'$ olduğundan; q önermesinin yanlış olmasından hareketle p önermesinin de yanlış olduğunu göstererek ***olmayana ergi*** yöntemiyle (dolaylı olarak) ispat edebiliriz.

iii) $p\Rightarrow q\equiv p'\vee q$ dür.$p\Rightarrow q\equiv 1$ (yani totoloji) ise $p\wedge q'\equiv 0$ (yani çelişki) olur.Yani önermenin hipotezi (varsayım) ile hükmün olumsuzunu aynı anda var olduğunu kabullendiğimizde bizi yanlış bir sonuca götürüyorsa, teoremi ***çelişki*** yöntemiyle (dolaylı olarak) ispat edebiliriz.

iv) Bazen $p\Rightarrow q$ biçimindeki bazı önermelerin (yanlış olduğu halde) doğru olduğu iddia edilebilir.Böyle iddiaların yanlış olduğunu ***aksine bir örnek vererek*** çürütebiliriz.

v) Bazı p(n) biçimindeki açık önermeli teoremler sonsuz çokluktaki durumlar için doğru olduğu idddiasında bulunabilir.Böyle bir teoremi ispat edebilmek için;
a) İlk olarak hangi durumda doğru olduğu örneklenir,
b) $p(n-1)\Rightarrow p(n)\equiv 1$ olduğu gösterilirse; (yani p(n-1) doğru iken p(n) nin de doğru olduğu başka bir deyimle p(n-1) in p(n) yi gerektirdiği gösterilirse), bu önerme sonsuz çoklukta durum için doğrudur. Bu ispat yöntemine ***tümevarım*** yöntemi denir.

Örnek: "$x\in R$ için, $x^2+x=12$ ise $x=3$ veya $x=-4$ tür." teoremini ispatlayalım.
a) Doğrudan ispat:
$x^2+x=12\Rightarrow x^2+x-12=0$
$\Rightarrow(x-3)(x+4)=0\Rightarrow x=3$ veya $x=-4$ tür.

b) Olmayana Ergi Yöntemiyle ispat:
$x\in R$, $x\neq 3$ ve $x\neq -4$ ise $x^2+x\neq 12$ dir.

c) Çelişki Yöntemiyle ispat:
$x\in R$ için, $(x^2+x=12)$ ve $(x\neq 3$ ve $x\neq -4)$ olsun.
$(x^2+x=12\Rightarrow x^2+x-12=0$
$\Rightarrow(x-3)(x+4)=0\Rightarrow x=3$ veya $x=-4)$ ve $(x\neq 3$ ve $x\neq -4)$ olur ki bu da bir çelişkidir.

Örnek: "$n\in N$ için, $p(n)=n^2+n+41$ biçimindeki sayılar asaldır." iddiasının yanlış olup olmadığını test edelim.Yanlış olduğunu gösteren en küçük doğal sayıyı bulalım.

Çözüm:
p(0)=41 (asal), p(1)=43 (asal), p(2)=47 (asal), p(3)=53 (asal), p(4)=61 (asal), ... ancak
$p(40)=40^2+40+41=40(40+1)+41=41^2$ (asal değil).

Örnek: "$n \in N^+$ olmak üzere; $1+2+3+ ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$ dir.
" teoremini tümevarım ispat yöntemiyle ispatlayalım.

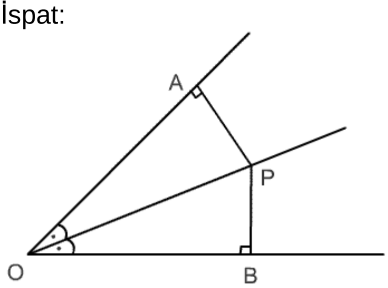
i) n=1 için $1 = \frac{1 \,.\, 2}{2}$ (doğru);
ii) Eşitlik n-1 için doğru olsun yani;
$1+2+3+ ... + (n-1) = \frac{(n-1)n}{2}$ olsun.
iii) Yukarıdaki eşitliğin her iki tarafına n ekleyelim.
$1+2+3+ ... + (n-1) +n = \frac{(n-1)n}{2} +n = \frac{n^2 - n + 2n}{2}$
$= \frac{n^2 + n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$ bulunur.Böylece teorem tümevarım yöntemiyle ispatlanmış olur.

Örnek: "Bir düzlemdeki n tane farklı doğru düzlemi en çok $\frac{n(n+1)}{2} + 1$ bölgeye ayırır" teoremini doğrudan ve tümevarım yöntemiyle ispatlayalım.

a) Doğrudan ispat:
1 doğru düzlemi 2 bölgeye ayırır.
2. farklı doğruyu çizdiğimizde 2 bölge daha ilave edilir; şimdi 2+2 bölgemiz oldu.
3. farklı doğruyu çizdiğimizde 3 bölge daha ilave edilir; şimdi 2+2+3 bölgemiz oldu.
4. farklı doğruyu çizdiğimizde 4 bölge daha ilave edilir; şimdi 2+2+3+4 bölgemiz oldu...Böylece devam ederek;
n. farklı doğruyu çizdiğimizde n bölge daha ilave edilir; şimdi 2+2+3+...+n bölgemiz oldu.Bunu da;
1+1+2+3+...+n biçiminde yazarsak;n tane doğruyla bir düzlem en çok $\frac{n(n+1)}{2} + 1$ bölgeye ayrıldığını ispatlamış oluruz.

b) Tümevarım yöntemiyle ispat:
i) Teoremin iddiası n=1 için $\frac{1.2}{2} + 1=2$ doğrudur.
ii) n-1 için doğru olsun yani n-1 tane farklı doğru düzlemi $\frac{(n-1)n}{2} + 1$bölgeye ayırsın.
iii) n. doğruyu çizdiğimizde önceki n-1 doğru ile n tane daha bölge ilave edilmiş olur.Yani toplam olarak;
$\frac{(n-1)n}{2} + 1+n$ bölge olur.Gerekli işlemler yapılırsa sonucun $\frac{n(n+1)}{2} + 1$ olduğu görülür.

Örnek:
“Bir düzlemde, bir noktanın bir açının kollarına eşit uzaklıkta olması için gerek ve yeter şart bu noktanın açının açıortayı üzerinde olmasıdır.” teoremini ispatlayalım.
İspat:



Gereklilik:P noktası açıortay üzerinde olsun.
PAO≅PBO (AKA)
Buradan $|PA|=|PB|$ olduğu ispatlanmış olur.

Yeterlilik: $|PA|=|PB|$ olsun. PAO ve PBO dik üçgenlerinin hipotenüsleri ve bir dik kenarları eşit oduğundan PAO≅PBO dır.
Buradan da m(POA)=m(POB) olduğu dolayısıyla OP açıortay olduğu ve P noktasının açıortay üzerinde olduğu ispatlanmış olur.

16. Aşağıdaki teoremleri (mümkünse birkaç yoldan) ispatlayınız.

a) $m,n \in N$, m ve n tek ise m.n de tektir.
b) $m,n \in N$, m ve n tek ise m+n çifttir.
c) $m,n \in N$, m.n tek ise m ve n tektir.
d) $m,n \in N$, m.n çift ise m veya n çifttir.
e) n, 6 dan büyük bir asal sayı ise n nin 6 ile bölümünden kalan 1 veya 5 tir. (veya n, 6 dan büyük bir asal sayı ise n nin 1 eksiği veya 1 fazlası 6 ile tam bölünür.)
f) Asal sayılar kümesi sonsuz elemanlıdır.
g) Düzlemde paralel iki doğrudan birini kesen üçüncü bir doğru diğerini de keser.
h) Çarpımları sıfır olan iki reel sayıdan en az biri sıfırdır.
i) İki reel sayının karelerinin toplamının sıfır olması için gerek ve yeter koşul ikisinin de sıfır olmasıdır.

17. $[(x-1)(x+2)\neq 0] \Rightarrow [(x\neq 1) \wedge (x\neq 2)]$ teoremini olmayana ergi metodu ile ispatlayınız.

18.$n \in N^+$ olmak üzere; aşağıdaki teoremleri tümevarım yöntemiyle ispatlayınız.

a) $1^2+2^2+3^2+ ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+ 1)}{6}$

b) $r \in R$, $n \in N$ olmak üzere; $1 + r + r^2 + ... + r^{n-1} = \frac{r^n - 1}{r - 1}$

(*Bu dosyayı* http://www.ifl.k12.tr/projedosyalar/dosyalar.htm *adresinden indirebilirsiniz.)*

İzmir Fen Lisesi Matematik Zümresi
Eylül - 2010