

## İFL GEOMETRİK KAVRAMLAR VE ÇALIŞMA SORULARI (10. Sınıf)

### Uzay, Uzayda Doğru ve Düzlemler

Bütün noktalar kümesine **uzay** denir.

#### AksiyoM:

“Doğrusal olmayan farklı üç noktadan sadece bir düzlem geçer”

#### Doğru ile Düzlemin Birbirine Göre Durumları:

- 1) Doğru düzlem içinde olabilir. (Yani doğrunun tüm noktaları aynı zamanda düzlemin de noktalarıdır.)
- 2) Doğru ile düzlem tek noktada kesişebilir.
- 3) Doğru düzleme paralel olabilir. (Yani doğru ile düzlem kesişmez.)

#### AksiyoM:

Bir doğrunun farklı iki noktası bir düzlemin de noktaları ise doğru düzlemin içindedir.

#### Düzlem Belirten Durumlar:

- 1) Doğrusal olmayan farklı 3 nokta;
- 2) Bir doğru ile dışındaki bir nokta;
- 3) Kesişen iki doğru;
- 4) Paralel iki doğrudan sadece bir düzlem geçer (yani bir düzlem belirtir)

Burada 1. ifade aksiyoM diğer üçü ise teoremdir.

#### Örnek:

Uzayda herhangi üçü doğrusal olmayan kaç tane nokta 35 tane düzlem belirtir?

#### Çözüm:

Aradığımız nokta sayısı n olsun.  
Uzayda doğrusal olmayan 3 nokta bir düzlem belirttiğine göre;

$$C(n, 3) = 35 \Rightarrow \frac{n!}{(n-3)! \cdot 3!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{6} = 35 \Rightarrow$$

$$n(n-1)(n-2) = 210 \Rightarrow n = 7 \text{ bulunur.}$$

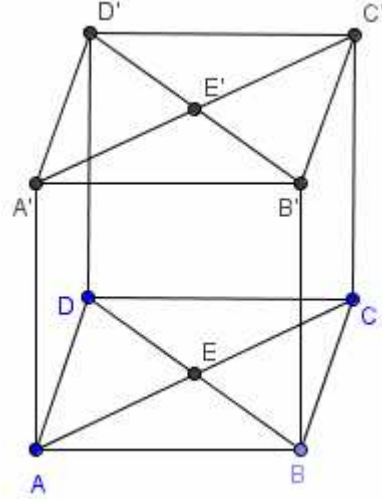
#### İki Düzlemin Birbirine Göre Durumları:

- 1) İki düzlem çakışık olabilir;
- 2) İki düzlem bir doğru boyunca kesişebilir;
- 3) İki düzlem paralel (yani kesişim kümeleri boş küme) olabilir.

#### Aykırı Doğrular:

Aynı düzlemde olmayan ve birbirini kesmeyen doğru'lara **aykırı doğru'lara** denir.

#### Örnek:



Yukarıdaki şekilde ABCDA'B'C'D' bir küptür.

Aşağıdaki soruları yukarıdaki şekle bakarak cevaplayalım:

- a) AA', BB', CC', DD' doğru'lari ikişer ikişer birbirine ..... dir.
- b) ABC düzlemi ile ACD düzlemi ..... dir.
- c) AA'D düzlemi ile BCC' düzlemi .....dir.
- d) AB doğru'su ile C'D' doğru'su ..... dir.
- e) ABC düzlemi ile AA'D düzleminin kesişim kümesi ..... dir.
- f) ABC' düzlemi ile BCB' düzleminin kesişim kümesi ..... dir.
- g) AA' doğru'su ile CD doğru'su ..... dir.
- h) DBB' düzlemi ile AA'C' düzleminin kesişim kümesi ..... dir.

#### Çözüm:

- a) AA', BB', CC', DD' doğru'lari ikişer ikişer birbirine **paralel** dir.
- b) ABC düzlemi ile ACD düzlemi **çakışık**tır.
- c) AA'D düzlemi ile BCC' düzlemi **paralel**dir.
- d) AB doğru'su ile C'D' doğru'su **paralel**dir.
- e) ABC düzlemi ile AA'D düzleminin kesişim kümesi **AD doğru'sudur**.
- f) ABC' düzlemi ile BCB' düzleminin kesişim kümesi **BC' doğru'sudur**.
- g) AA' doğru'su ile CD doğru'su **aykırı**dır.

h) DBB' düzlemi ile AA'C' düzleminin kesişim kümesi EE' doğrusudur.

### Teorem ve İspat:

Doğruluğu ispatlanabilen önermelere **teorem**, (bir teoremi p ve q birer önerme olmak üzere  $p \Rightarrow q$  veya  $p \Leftrightarrow q$  biçiminde ifade edebiliriz)

$p \Rightarrow q$  biçiminde ifade edilebilen bir teoremdeki p önermesine **hipotez(varsayım)**, q önermesine de **hüküm** denir.

**Not:** Teoremleri ispatlarken çeşitli yöntemler kullanılabilir.

a) Doğrudan İspat

b) Dolaylı ispat

i) Olmaya Ergi

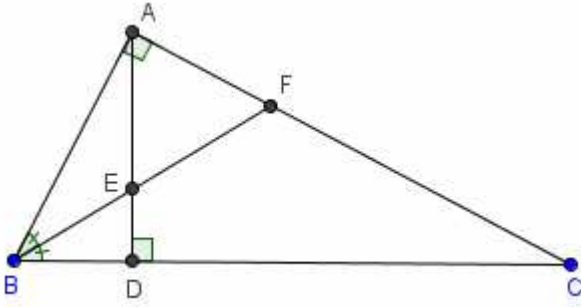
ii) Çelişki

iii) Aksine örnek verme ... gibi.

c) Tümevarım

d) Tümnden gelim ... gibi.

### Örnek:



“Yukarıdaki şekilde verilenlere göre  $|AE| = |AF|$  olduğunu ispatlayınız.” problemini;

a)  $p \Rightarrow q$  biçiminde ifade ediniz

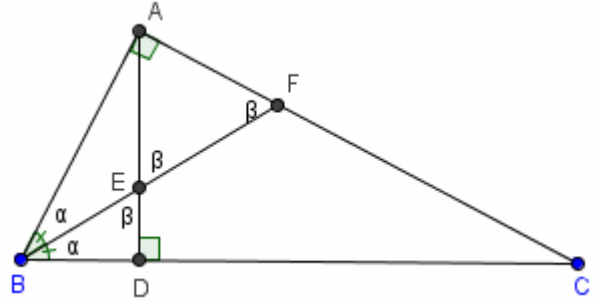
b) Doğrudan ispat ediniz.

c) Olmaya ergi yöntemiyle ispat ediniz.

### Çözüm:

a) A köşesi dik olan bir ABC üçgeninin B açısının iç açıortayının [AD] yüksekliğini ve [AC] kenarını sırasıyla E ve F noktalarında kesiyorsa  $|AE| = |AF|$  dir.

b) Doğrudan ispat:



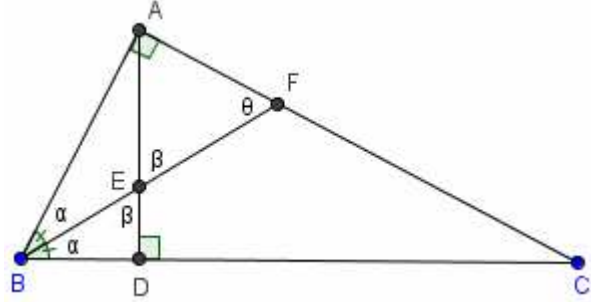
$m(\angle EBD) = m(\angle EBA) = \alpha$  ve  $m(\angle BED) = \beta$  diyelim.

EBD ve ABF dik üçgen olduğundan;  $m(\angle AFB) = \alpha$  dır.

Öte yandan  $m(\angle BED) = m(\angle AEF) = \beta$  (ters açılar)

Böylece AEF üçgeni ikizkenar olup  $|AE| = |AF|$  olur.

c) Olmaya Ergi Yöntemiyle ispat:



Varsayalım ki  $|AE| \neq |AF|$  olsun. AEF üçgeninin taban açılarından birisi  $\beta$  değerine  $\theta$  diyelim.  $\alpha \neq \theta$  olmalıdır.

BED dik üçgen olduğundan  $\alpha + \beta = 90^\circ$  dir.

ABF üçgeninde  $\alpha + \theta \neq 90^\circ$  olması gerekir. Bu ise ABF üçgeninin dik üçgen olmadığı anlamına gelir ki bu ise hipoteze aykırıdır.

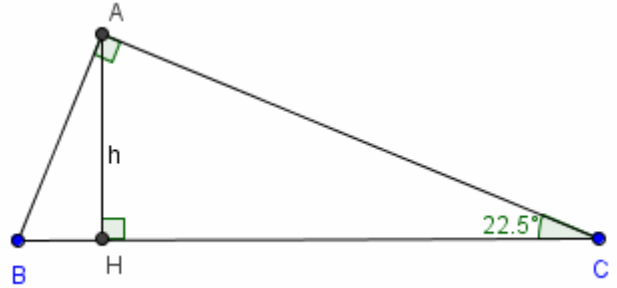
Buna göre  $|AE| = |AF|$  olmak zorundadır.

### Örnek:

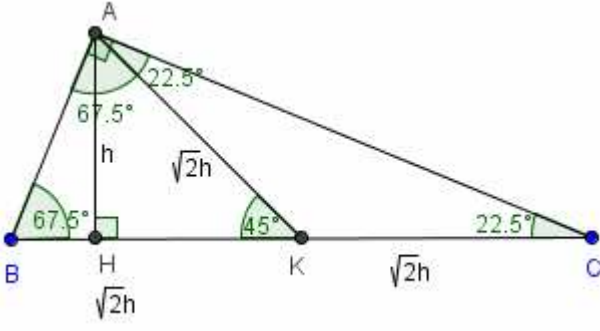
A köşesi dik açı ve  $m(\angle C) = 22,5^\circ$  olan bir dik üçgenin hipotenüse ait yüksekliği h ve hipotenüsünün uzunluğu a ise  $a = 2\sqrt{2}h$  olduğunu ispatlayınız.

### Doğrudan ispat:

Önce şekli probleme uygun aşağıdaki gibi çizelim.



$m(\angle CAH) = 22,5^\circ$  lik bir açı çizelim.



$m(\widehat{HKA})=45^\circ$  olduğundan AHK ikizkenar dik üçgeninde  $|AK|=\sqrt{2}h$  dir.

AKH ikiz kenar üçgeninde  $|KC|=|AK|=\sqrt{2}h$

Ayrıca KAB de ikizkenar üçgen olup  $|AK|=|BK|=\sqrt{2}h$

Böylece  $|BC|=a=2\sqrt{2}h$  birim bulunur.

### Problemler:

1. Bir (E) düzlemi veriliyor.

- Düzlemde bir d doğrusu,
- Düzlemde  $d_1, d_2$  gibi farklı iki doğru,
- Düzlemde  $d_1, d_2, d_3$  gibi farklı üç doğru,
- Düzlemde  $d_1, d_2, d_3, d_4$  gibi farklı dört doğru çizerek düzlemi en az sayıda ve en çok sayıda kaç bölgeye ayırdığını sayınız. Doğru sayısı ile bölge sayıları arasında bir ilişkinin olup olmadığını tartışınız.

e) Düzlemde  $d_1, d_2, \dots, d_n$  gibi n tane doğrunun düzlemi en az ve çok kaç bölgeye ayırdığını tahmin edip tahmininizi ispatlayınız.

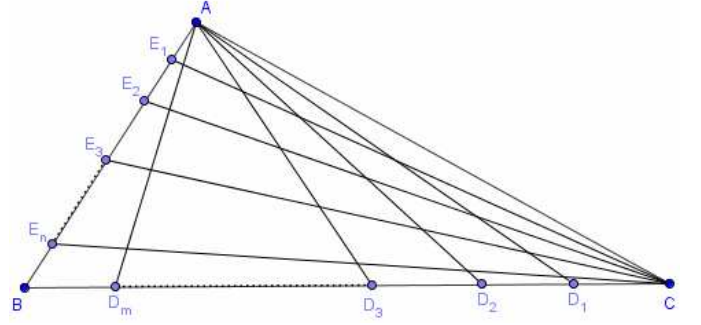
2. Bir düzlemde verilen 11 farklı doğru düzlemi en az ve en çok kaç bölgeye ayırır.

3. Bir düzlemde verilen kaç tane farklı doğru düzlemi en çok kaç 191 bölgeye ayırır?.

4. Bir düzlemde verilen farklı doğrular düzlemi en az 23 bölgeye ayırdığına göre bu doğruların tamamı kullanılarak;

- Düzlemi en çok kaç bölgeye ayırır?
- Bu durumda doğrular kaç noktada kesişir?

5.



Yukarıdaki şekilde ABC üçgen biçimindeki bir arazi parçası BC kenarı m tane nokta ile AB kenarı da n tane nokta ile işaretleniyor. Acaba toplam kaç parsel (bölge) oluşmuştur?

6. Aşağıdaki önermelerin doğru olup olmadığını belirtiniz.

- Bir noktadan sonsuz sayıda doğru geçer
- Farklı iki noktadan sadece bir doğru geçer
- İki doğru kesişmiyorsa paraleldir.
- Bir doğruya dışındaki bir noktadan sadece bir paralel doğru çizebiliriz.
- Üç nokta bir doğru belirtiyorsa bu noktalar doğrusaldır
- Bir doğruya üzerindeki bir noktadan sadece bir dik doğru çizebiliriz.
- $A \in d$  ve  $B \in d \Rightarrow AB \equiv d$  dir.
- $AB \equiv d$  ve  $BC \equiv d \Rightarrow AC \equiv d$  dir.
- $d \cap k \equiv \{A, B\} \Rightarrow d \equiv k \equiv AB$
- Bir düzlemde verilen d ve k doğruları için,  $d \cap k = \{ \} \Leftrightarrow d // k$  dir.

7. Uzayda verilen 8 nokta

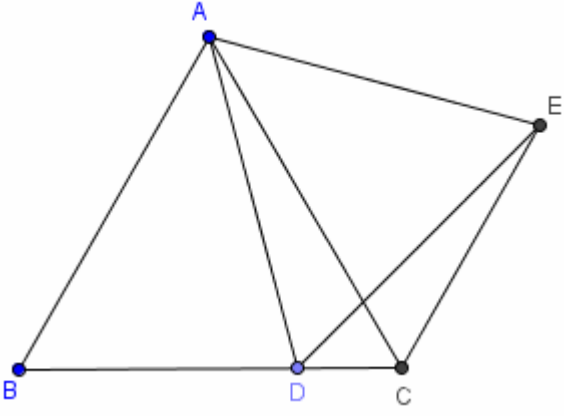
- En çok kaç doğru belirtir
- En çok kaç düzlem belirtir

8.

a) Uzayda birbirine paralel 5 doğru, bir A noktasında kesişen 6 doğru olmak üzere 11 doğru veriliyor. Bu doğruların A dan başka bir noktada kesişmediklerine göre en çok kaç düzlem oluşur?

b) Uzayda bir B noktasında kesişen 7 doğru ile herhangi 8 nokta veriliyor. Bu geometrik nesnelere kullanılarak en çok kaç düzlem belirtilebilir?.

9.



Yukarıdaki şekilde ABC ve ADE üçgenleri birer eşkenar üçgen olduğuna göre;  $m(\text{DCE})=120^\circ$  olduğunu ispatlayınız.

10. Bir açısı  $75^\circ$  olan bir dik üçgen veriliyor.

a) Hipotenüs uzunluğunun, hipotenüse ait yüksekliğinin 4 katı olduğunu,

b)  $\tan 75^\circ = 2 + \sqrt{3}$  olduğunu uygun şekil çizerek ispatlayınız.