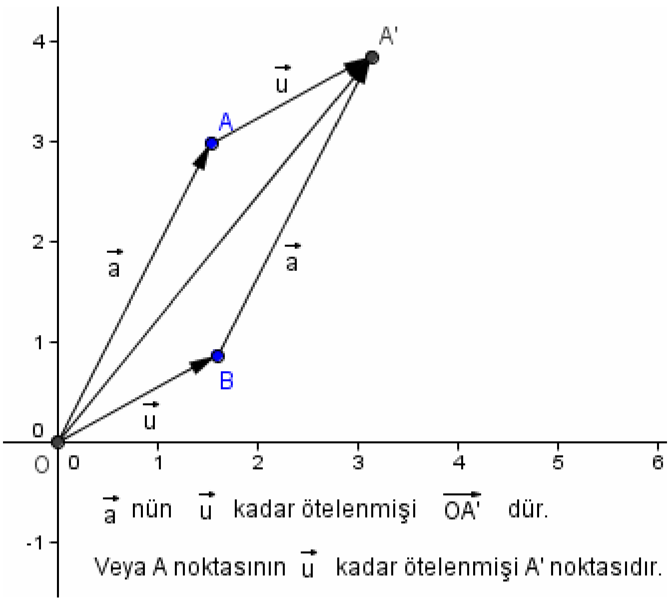
Düzlemde Dönüşümler: Öteleme, Dönme ve Simetri

Düzlemin noktalarını, düzlemin noktalarına eşleyen bire bir ve örten bir fonksiyona **düzlemin bir dönüşümü** denir.

Öteleme: $\vec{a}=(a_1,a_2)$ ve $\vec{u}=(u_1,u_2)$ olmak üzere

$\vec{a}+\vec{u}=(a_1+u_1,a_2+u_2)$ vektörüne **"$\vec{a}$ nün $\vec{u}$ kadar ötelenmişi**" denir.



Not: Şekilden de görüleceği gibi öteleme sonucu $\vec{a}$ nün uzunluğunda, yön ve doğrultusunda bir değişiklik olmamıştır.

Başka bir deyimle öteleme dönüşümü; uzunluğu, doğrultu ve yönü **korur.**

Dönme:

a) Düzlemde verilen A noktası için; $\overrightarrow{OA}$ vektörünün O (orijin) noktası etrafında α açısı kadar pozitif yönde (saatin dönme yönünün tersi) dönmesiyle bulunan vektör $\overrightarrow{OA'}$ ise "A noktasının orijin etrafında α kadar **döndürülmesi** sonucunda A' noktası bulunmuştur" denir.

b) Düzlemde verilen A ve B noktaları için; $\overrightarrow{AB}$ vektörünün A noktası etrafında α açısı kadar pozitif yönde (saatin dönme yönünün tersi) dönmesiyle bulunan vektör $\overrightarrow{AB'}$ ise "B noktasının A noktası etrafında α kadar **döndürülmesi** sonucunda B' noktası bulunmuştur" denir.

Not 1: Buradaki A noktasına **dönme merkezi** denir.

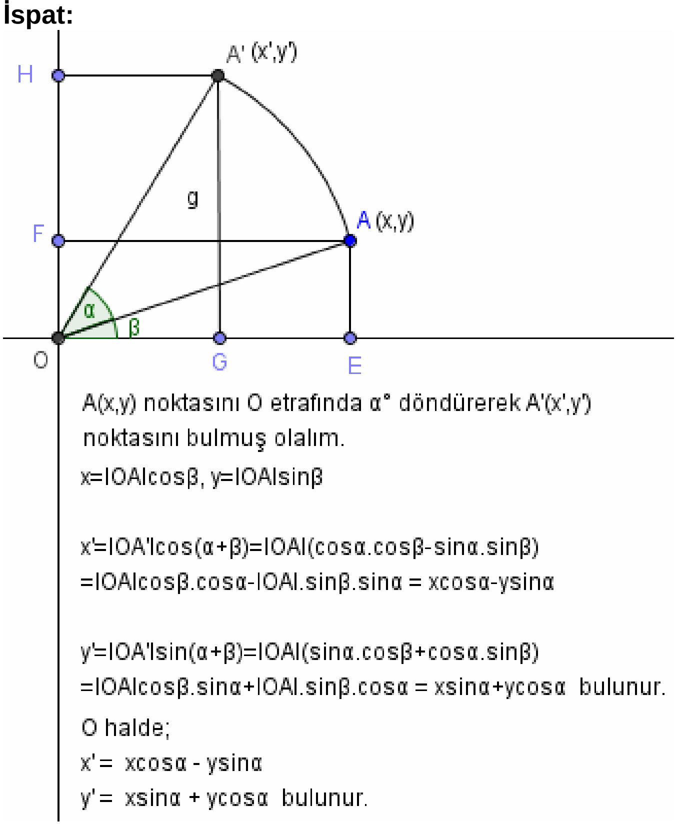
Not 2: Dönme merkezi O(0,0) orijin alınırsa yapılan dönme işlemine **orijin etrafında dönme** denir.

Not 3: Aksi belirtilmedikçe bir dönme dönüşümünün merkezi orijin kabul edilir.

Not 4: A(x,y) noktasının orijin etrafında α kadar pozitif yönde döndürülmesiyle bulunan nokta A'(x',y') ise;

x'=xcosα-ysinα, y'=xsinα+ycosα dır.

İspat:



Not 5: Dönme dönüşümü uzunlukları koruyan bir dönüşüm olduğundan A(x,y) noktasını α kadar döndürdüğümüzde elde edilen A'(x',y') noktasını bulmak demek; z=x+yi karmaşık sayısını cosα+isinα = cisα sayısı ile çarpılarak elde edilen z'=x'+y'i karmaşık sayısını bulmak demektir.
Yani; z'=z.cisα ⇒ (x',y') = (x,y).cisα
⇒ x'+y'i = (x+yi)(cosα+isinα)
=xcosα-ysinα+(xsinα+ycosα)i
⇒ x'=xcosα-ysinα, y'=xsinα+ycosα bulunur.

80.

a) A(3, 2) noktasını $\vec{u}=(-2,3)$ vektörü kadar ötelenmişini bulalım.

b) Hangi noktayı $\vec{u}=(3, -1)$ kadar öteleyelim ki, B(1, -4) olsun.

c) Verilen bir P(a,b) noktasını verilen bir $\vec{u}=(u_1,u_2)$ vektörü kadar öteleyen bir GeoGebra programı yapalım.

Daha sonra da; bu programı kullanarak a) ve b) şıklarındaki soruları çözümleyelim.

Çözüm:

a) A(3, 2) noktasını $\vec{u}=(-2,3)$ vektörü kadar ötelenmişi olan noktaya A' diyelim.

$A' = A+\vec{u} = (3,2)+(-2,3) = (1,5)$ bulunur.

b) Ötelenen nokta $A(a_1,a_2)$ olsun.

$A+\vec{u}=B$ olmalı,

$(a_1,a_2)+(3,-1) = (1,-4) \Rightarrow a_1+3=1$ ve $a_2-1=-4$

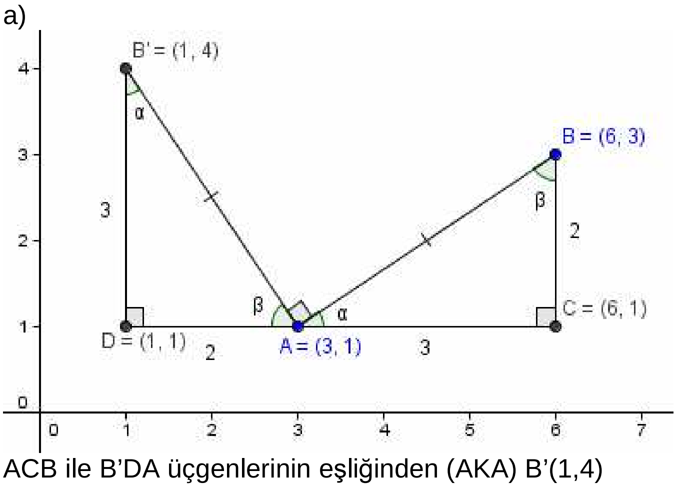
$\Rightarrow a_1=-2$ ve $a_2=-3$ olur.
O halde A(-2, -3) bulunur.

c) Problemin çözüm dosyası;
oteleme_nokta_01.ggb dir

81.
a) B(6,3) noktasının A(3,1) noktası etrafında 90° döndürülmesiyle elde edilen A' noktasının koordinatlarını bulunuz.

b) Verilen bir $B(b_1,b_2)$ noktasının $A(a_1,a_2)$ etrafında verilen bir $\alpha°$ lik açı ile döndürülmesiyle elde edilen $B'(b'_1,b'_2)$ noktasını bulduran bir GeoGebra programı yazınız.

Çözüm:
a)



ACB ile B'DA üçgenlerinin eşliğinden (AKA) B'(1,4) bulunur.

b) Problemin çözüm dosyası;
donme_Bnin_A_etrafinda_alfa.ggb dir

82.
d : y = 3x-6 doğrusu veriliyor.
a) d doğrusunun x ekseni boyunca 2 birim sağa ötelenmiş doğrunun denklemini;

b) d doğrusunun y ekseni boyunca 3 birim aşağı ötelenmiş doğrunun denklemini;

c) d doğrusunun $\vec{u}=(2,-3)$ vektörü kadar ötelenmiş doğrunun denklemini;

d) d doğrusunun orijin etrafında 90° pozitif yönde döndürülerek bulunan doğrunun denklemini;

e) d doğrusunun orijin etrafında 60° saatin dönme yönünde döndürülerek elde edilen doğrunun denklemini;

f) d doğrusunun A(1,2) noktası etrafında 90° saatin dönme yönünün ters yönünde döndürülerek elde edilen doğrunun denklemini bulunuz.

g) Bu problemi genelleştirerek GeoGebra programı ile çözülebilen bir program yazınız.
(Yani; y=mx+n doğrusunu; $\vec{u}=(u_1,u_2)$ vektörü boyunca ötelenen doğru ile herhangi bir $A(a_1,a_2)$ noktası etrafında $\alpha°$ döndürülmesi ile bulunan doğrunun grafiğini çizdiren bir GeoGebra programı yapınız).

Çözüm:
a) d: y=3x-6 doğrusu üzerindeki genel bir nokta P(x,y) olsun.

P nin 2 birim sağa ötelenerek; (yani $\vec{a}=(2,0)$ vektörü kadar ötelenerek) bulunan nokta P'(x',y') olsun.
Buna göre; x'=x+2, y'=y+0=y ⇒ x=x'-2, y=y' değerlerini doğru denkleminde yerine koyalım:

y'=3(x'-2)-6 ⇒ y'=3x'-12
Denklemi y=f(x) biçiminde yazarsak aranan doğru denklemi; y=3x-12 olur.

b) d: y=3x-6 doğrusu üzerindeki genel bir nokta P(x,y) olsun.

P nin 3 birim aşağıya ötelenerek; (yani $\vec{a}=(0,-3)$ vektörü kadar ötelenerek) bulunan nokta P'(x',y') olsun.
Buna göre; x'=x+0, y'=y-3=y ⇒ x=x', y=y'+3 değerlerini doğru denkleminde yerine koyalım:

y' + 3 =3x'-6 ⇒ y'=3x'-9
Denklemi y=f(x) biçiminde yazarsak aranan doğru denklemi; y=3x-9 olur.

c) d: y=3x-6 doğrusu üzerindeki genel bir nokta P(x,y) olsun.

P nin $\vec{u} = (2, -3)$ vektörü kadar ötelenerek bulunan nokta P'(x',y') olsun.

Buna göre; x'=x+2, y'=y-3=y ⇒ x=x'-2, y=y'+3 değerlerini doğru denkleminde yerine koyalım:

y' + 3 =3(x'-2)-6 ⇒ y'=3x'-15
Denklemi y=f(x) biçiminde yazarsak aranan doğru denklemi; y=3x-15 olur.

d) d: y=3x-6 doğrusu üzerindeki genel bir nokta P(x,y) olsun.
P nin orijin etrafında 90° döndürülerek bulunan nokta P'(x',y') olsun.

Buna göre; x'=xcos90-ysin90, y'=xsin90+ycos90
⇒ x'= -y ,y'=x ⇒ x=y', y= -x' değerlerini doğru denkleminde yerine koyalım:

$-x' = 3y'-6 \Rightarrow y' = \frac{6 - x'}{3}$

Denklemi y=f(x) biçiminde yazarsak aranan doğru denklemi; $y = \frac{6 - x}{3}$ veya x + 3y – 6 = 0 olur.

e) d: y=3x-6 doğrusu üzerindeki genel bir nokta P(x,y) olsun.
P nin orijin etrafında saatin dönme yönünde 60° döndürülerek bulunan nokta P'(x',y') olsun.

Buna göre;
x'=xcos(-60)-ysin(-60), y'=xsin(-60)+ycos(-60)

$\Rightarrow x' = \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}y,\ y' = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{y}{2}$

$\Rightarrow x = \frac{x' - \sqrt{3}y'}{2},\ \ y = \frac{\sqrt{3}x' + y'}{2}$ değerlerini doğru denkleminde yerine koyup düzenlersek;

$(3-\sqrt{3})x' - (3\sqrt{3}+1)y' - 12 = 0$ olur.

Denklemi ax+by+c=0 biçiminde yazarsak aranan doğru denklemi; $(3-\sqrt{3})x - (3\sqrt{3}+1)y - 12 = 0$ olur.

f) d: y=3x-6 doğrusu üzerindeki genel bir nokta P(x,y) olsun.
P nin A(1,2) etrafında saatin dönme yönünün ters yönünde 90° döndürülerek bulunan nokta P'(x',y') olsun.

P yi A(1,2) etrafında döndürerek P'(x',y') noktasını doğrudan bulmak yerine, $\overrightarrow{AP}$ konum vektörünü O etrafında döndürerek bulunan $\overrightarrow{OQ}$ vektörünü $\overrightarrow{OA}$ vektörü kadar ötelemek demektir.

Yani $\overrightarrow{OP'} = D_\alpha(\overrightarrow{AP}) + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OA}$

O halde $\overrightarrow{OP'} = D_{90°}$ (x-1,y-2) + (1,2)

(x',y') = ((x-1)cos90° –(y-2)sin90°,(x-1)sin90°+(y-2)cosx90°)+(1,2)

(x',y') = (2-y, x-1) +(1,2) = (3-y , x+1) ⇒ x'=3-y, y'=x+1
⇒ x=y'-1, y=3-x' değerlerini doğru denkleminde yerine koyalım:

3-x' = 3(y'-1) – 6

Denklemi ax+by+c=0 biçiminde yazarsak aranan doğru denklemi; x + 3y –12 = 0 bulunur.

g) Problemin çözüm dosyası; dogrunun_otelenmesi_dondurulmesi.ggb dir

83.

e : $y = x^2$ eğrisi (parabolü) veriliyor.

a) Parabolün x ekseni boyunca 2 birim sağa ötelenmişinin denklemini;

b) Parabolün y ekseni boyunca 3 birim aşağı ötelenmişinin denklemini;

c) Parabolün $\vec{u} = (2, -3)$ vektörü kadar ötelenmişinin denklemini;

d) Parabolün orijin etrafında 90° pozitif yönde döndürülerek bulunan parabolün denklemini;

e) Parabolün orijin etrafında 60° saatin dönme yönünde döndürülerek elde edilen parabolün denklemini;

f) Parabolün A(1,2) noktası etrafında 90° saatin dönme yönünün ters yönünde döndürülerek elde edilen parabolün denklemini bulunuz.

g) Bu problemi genelleştirerek GeoGebra programı ile çözülebilen bir program yazınız.

(Yani; $y=ax^2+bx+c$ parabolünü; $\vec{u} = (u_1,u_2)$ vektörü boyunca ötelenen parabol ile herhangi bir $A(a_1,a_2)$ noktası etrafında α° döndürülmesi ile bulunan parabolün grafiğini çizdiren bir GeoGebra programı yapınız).

Çözüm:

a) e: $y=x^2$ parabolü üzerindeki genel bir nokta P(x,y) olsun.

P nin 2 birim sağa ötelenerek; (yani $\vec{a} = (2, 0)$ vektörü kadar ötelenerek) bulunan nokta P'(x',y') olsun.
Buna göre; x'=x+2, y'=y+0=y ⇒ x=x'-2, y=y' değerlerini doğru denkleminde yerine koyalım:

$y'=(x'-2)^2 \Rightarrow y'=x'^2 -4x' + 4$

Denklemi y=f(x) biçiminde yazarsak aranan doğru denklemi; $y=(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$ olur.

b) $y=x^2$ parabolü üzerindeki genel bir nokta P(x,y) olsun.

P nin 3 birim aşağıya ötelenerek; (yani $\vec{a}=(0, -3)$ vektörü kadar ötelenerek) bulunan nokta P'(x',y') olsun.
Buna göre; x'=x+0, y'=y-3=y ⇒ x=x', y=y'+3 değerlerini doğru denkleminde yerine koyalım:

$y' + 3 = x'^2 \Rightarrow y' = x'^2 - 3$

Denklemi y=f(x) biçiminde yazarsak aranan doğru denklemi; $y=x^2 -3$ olur.

c) $y=x^2$ parabolü üzerindeki genel bir nokta P(x,y) olsun.

P nin $\vec{u}=(2, -3)$ vektörü kadar ötelenerek bulunan nokta P'(x',y') olsun.

Buna göre; x'=x+2, y'=y-3=y ⇒ x=x'-2, y=y'+3 değerlerini doğru denkleminde yerine koyalım:

$y' + 3 = (x'-2)^2 \Rightarrow y'=(x'-2)^2 - 3$

Denklemi y=f(x) biçiminde yazarsak aranan doğru denklemi; $y=(x-2)^2 -3$ olur.

d) $y=x^2$ parabolü üzerindeki genel bir nokta P(x,y) olsun.
P nin orijin etrafında 90° döndürülerek bulunan nokta P'(x',y') olsun.

Buna göre; x'=xcos90-ysin90, y'=xsin90+ycos90
⇒ x'= -y ,y'=x ⇒ x=y', y= -x' değerlerini parabol denkleminde yerine koyalım:

$-x' = y'^2$

Denklemi x=f(y) biçiminde yazarsak aranan parabol denklemi; $x = -y^2$ olur.

e) $y=x^2$ parabolü üzerindeki genel bir nokta P(x,y) olsun.
P nin orijin etrafında saatin dönme yönünde 60° döndürülerek bulunan nokta P'(x',y') olsun.

Buna göre;
x'=xcos(-60)-ysin(-60), y'=xsin(-60)+ycos(-60)
$\Rightarrow x'=\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}y$, $y'= -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{y}{2}$

$\Rightarrow x = \frac{x' - \sqrt{3}y'}{2}$, $y = \frac{\sqrt{3}x' + y'}{2}$ değerlerini parabol denkleminde yerine koyalım:

$$\frac{\sqrt{3}x' + y'}{2} = \left(\frac{x' - \sqrt{3}y'}{2}\right)^2$$

Denklemi $ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$ biçiminde yazarsak aranan denklem;
$x^2 + 3y^2 - 2\sqrt{3}\,xy - 2\sqrt{3}\,x - 2y = 0$ olur.

f) $y=x^2$ parabolü üzerindeki genel bir nokta P(x,y) olsun.
P nin A(1,2) etrafında saatin dönme yönünün ters yönünde 90° döndürülerek bulunan nokta P'(x',y') olsun.

P yi A(1,2) etrafında döndürerek P'(x',y') noktasını doğrudan bulmak yerine, $\overrightarrow{AP}$ konum vektörünü O etrafında döndürerek bulunan $\overrightarrow{OQ}$ vektörünü $\overrightarrow{OA}$ vektörü kadar ötelemek demektir.

Yani $\overrightarrow{OP'} = D_\alpha(\overrightarrow{AP}) + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OA}$

O halde $\overrightarrow{OP'} = D_{90°}$ (x-1,y-2) + (1,2)

(x',y') = ((x-1)cos90° –(y-2)sin90°,(x-1)sin90°+(y-2)cosx90°)+(1,2)

(x',y') = (2-y, x-1) +(1,2) = (3-y , x+1) ⇒ x'=3-y, y'=x+1
⇒ x=y'-1, y=3-x' değerlerini parabol denkleminde yerine koyalım:

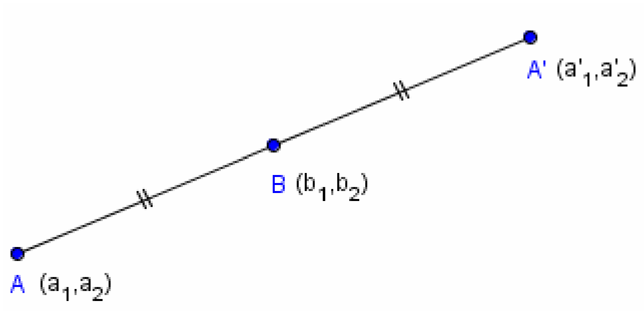
$3-x' = (y'-1)^2$

Denklemi $ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$ yazarsak aranan parabol $y^2 + x - 2y - 2 = 0$ bulunur.

g) Problemin çözüm dosyası; parabolun_otelenmesi_dondurulmesi.htmldir

Simetri:
a) Noktaya Göre Simetri:

[AA'] nın orta noktası B ise; "**A noktasının B noktasına göre simetriği A' dür**" denir.



Not 1: Burada B orta nokta olduğundan;

$b_1 = \dfrac{a_1 + a'_1}{2}$ ve $b_2 = \dfrac{a_2 + a'_2}{2}$ veya

$2b_1 = a_1 + a'_1$ ve $2b_2 = a_2 + a'_2$ veya

$a'_1 = 2b_1 - a_1$ ve $a'_2 = 2b_2 - a_2$ dir.

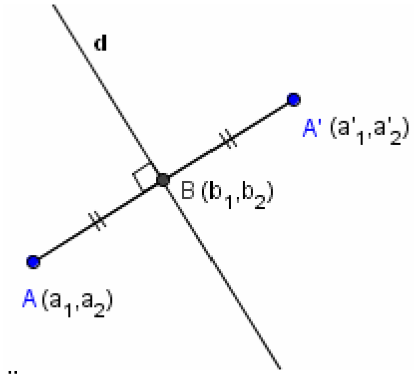
Not 2: $S_B(A) = 2B – A$ dönüşümüne; '"**A noktasının B noktasına göre simetri (yansıma)dönüşümü**" denir.

Not 3: P(x,y) noktasının O(0,0) orijine göre simetriği;

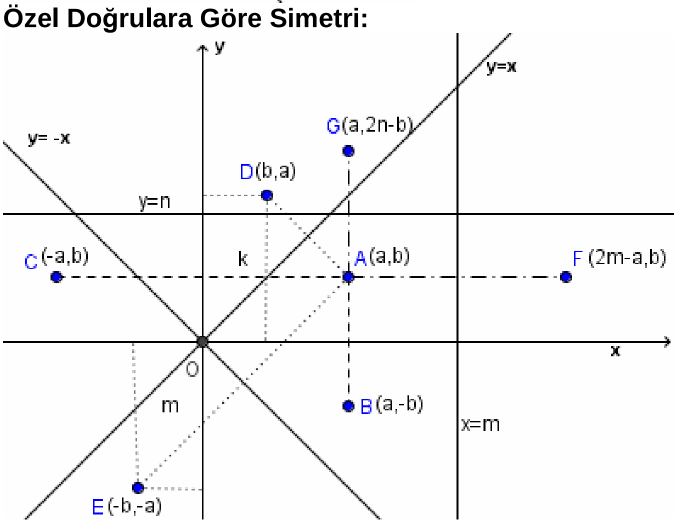
$S_O(A) = 2B – A = 2.(0,0) – (x,y) = (-x, -y)$ dir.

a) Doğruya Göre Simetri:

[AA'] nın orta dikme doğrusu d doğrusu ise; "**A noktasının d doğrusuna göre simetriği (yansıması) A' dür**" denir.



Özel Doğrulara Göre Simetri:



Yukarıdaki şekilde bir A(a,b) noktasının bazı özel doğrulara göre simetrikleri (yansımaları) aşağıda verilmiştir.

i) Ox eksenine Göre Simetri:
A(a,b) noktasının x eksenine göre simetriği B(a, -b) dir.
Burada a apsisinin değişmediğine dikkat ediniz.

ii) Oy eksenine Göre Simetri:
A(a,b) noktasının y eksenine göre simetriği C(-a, b) dir.
Burada b ordinatının değişmediğine dikkat ediniz.

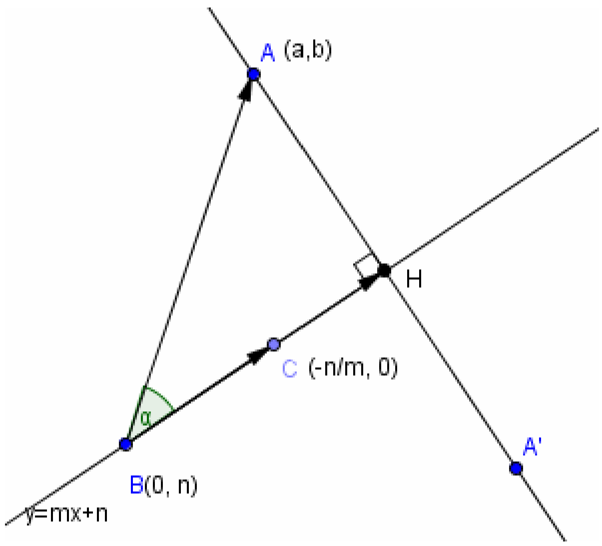
iii) y=x doğrusuna (1. açıortay doğrusu) Göre Simetri:
A(a,b) noktasının y=x 1. açıortay doğrusuna göre simetriği; D(b, a) dır.
Burada koordinatların yer değiştirdiğine dikkat ediniz.

iv) y= -x doğrusuna (2. açıortay doğrusu) Göre Simetri:
A(a,b) noktasının y= -x 2. açıortay doğrusuna göre simetriği; E(-b, -a) dır.
Burada koordinatların yer ve işaret değiştirdiğine dikkat ediniz.

v) x=m düşey doğrusuna Göre Simetri:
A(a,b) noktasının x=m düşey doğrusuna göre simetriği; F(2m-a, b) dir.
Burada F noktasının; A noktasının (m,a) noktasına göre simetriği olduğuna dikkat ediniz.

vi) y=n yatay doğrusuna Göre Simetri:
A(a,b) noktasının y=n yatay doğrusuna göre simetriği; G(a, 2n-b) dir.
Burada G noktasının; A noktasının (a,n) noktasına göre simetriği olduğuna dikkat ediniz.
y=mx+n doğrusuna Göre Simetri:

a) Vektörel Çözüm:
Önce y=mx+n doğrusu üzerinde B ve C noktaları alalım.
Kolaylık olsun diye doğrunun eksenleri kestiği noktaları alabiliriz.
Yani B(0,n) ve C(-n/m,0) olur.



$$\vec{BH} = k\vec{BC} \Rightarrow k = \frac{|\vec{BH}|}{|\vec{BC}|} = \frac{|\vec{BA}|.\cos\alpha}{|\vec{BC}|}$$

$$\vec{BA}.\vec{BC} = |\vec{BA}|.|\vec{BC}|.\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\vec{BA}.\vec{BC}}{|\vec{BA}|.|\vec{BC}|}$$

Bu değeri üstteki eşitlikte yerine koyalım:

$$\vec{BH} = \left(\frac{|\vec{BA}|}{|\vec{BC}|}\,\frac{\vec{BA}.\vec{BC}}{|\vec{BA}|.|\vec{BC}|}\right)\vec{BC} = \left(\frac{\vec{BA}.\vec{BC}}{|\vec{BC}|^2}\right)\vec{BC}$$

$$\vec{BH} = \vec{BO} + \vec{OH} = \left(\frac{\vec{BA}.\vec{BC}}{|\vec{BC}|^2}\right)\vec{BC} \Rightarrow$$

$$\vec{OH} = \left(\frac{\vec{BA}.\vec{BC}}{|\vec{BC}|^2}\right)\vec{BC} + \vec{OB} \text{ bulunur.}$$

Böylece [AA’] nün H orta noktasının koordinatları bulunur, buradan da A’ noktası bulunmuş olur.

Örnek:
A(1, -3) noktasının y=2x-4 doğrusuna göre simetriği olan A’ noktasının koordinatlarını bulalım.

Çözüm:
a) Önce doğru üzerinde B ve C noktaları alalım. Kolaylık olsun diye doğrunun eksenleri kestiği noktaları alabiliriz. B(0, -4) ve C(2, 0) olur.

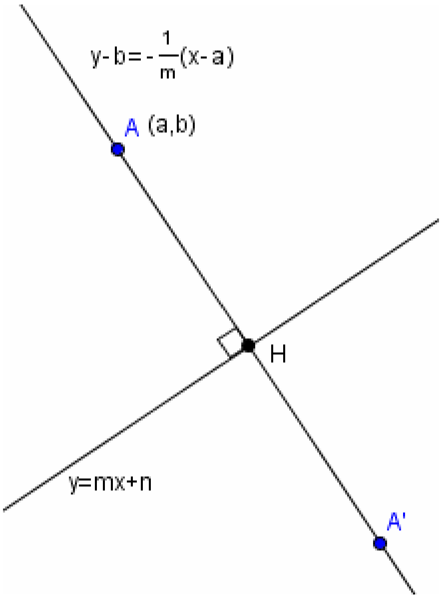
$\vec{BA} = (1, 1)$, $\vec{BC} = (2, 4)$

$$\vec{OH} = \left(\frac{\vec{BA}.\vec{BC}}{|\vec{BC}|^2}\right)\vec{BC} + \vec{OB} = \frac{2+4}{20}(2,4) + (0,-4) \Rightarrow$$

$\vec{OH} = (3/5, -14/5) \Rightarrow H(3/5, -14/5)$

Buna göre A(1, -3) ün H(3/5, - 14/5) noktasına göre simetriği A’(2.3/5 -1, 2.(-14/5)-(-3)) ⇒ A’(1/5, -13/5) bulunur.

b) Analitik Çözüm1:



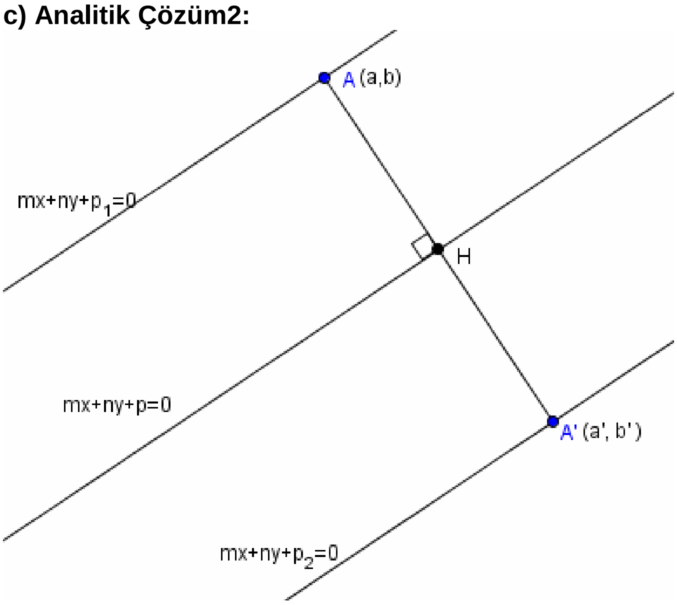
A dan geçen ve eğimi -1/m olan AA’ doğrusunun denklemi $y-b = \frac{-1}{m}(x-a)$ dır.
İki doğru denklemlerinin ortak çözümünü yaparak H noktasını buluruz. Sonra da orta nokta bağıntısından A’ bulunur.

Örnek:
A(1, -3) noktasının y=2x-4 doğrusuna göre simetriği olan A’ noktasının koordinatlarını analitik çözüm ile bulalım.

Çözüm:
A dan geçen y=2x-4 doğrusuna dik olan doğru denklemini bulalım.
y+3=-1/2 (x-1) ⇒ x+2y+5=0
Bu denklem ile y=2x-4 denklemi ortak çözülürse x=3/5, y=-14/5 dir. O halde H(3/5, -14/5) olur.
Buna göre A’ nün koordinatları; A’(2.3/5 -1, 2(-14/5) + 3)

A’(1/5, -13/5) bulunur.

c) Analitik Çözüm2:



Verilen mx+ny+p=0 doğrusuna, A ve A’ den çizilen doğruların denklemleri de $mx+ny+p_1=0$ ve $mx+ny+p_2=0$

gibi olacaktır. A noktası $mx+ny+p_1=0$ doğrusu üzerinde olduğundan koordinatları bu denklemi sağlar. Buradan p_1 bulunur. $2p= p_1+p_2$ eşitliğinden p_2 bulunur.

A'(a', b') olsun. Noktanın koordinatlarını $mx+ny+p_2=0$ denkleminde yerine koyarak a' ile b' arasında bir bağıntı buluruz.

Ayrıca AA' verilen doğruya dik olduğundan; $\frac{b'-b}{a'-a} = \frac{n}{m}$ dir.

Bu iki denklem çözülerek A(a',b') koordinatları bulunur.

Örnek:
A(-2, 5) noktasının $3x-4y+12=0$ doğrusuna göre simetriğini bulalım.

Çözüm:
A dan geçen ve verilen doğruya paralel olan doğru denklemi $3x-4y+c=0$ biçimindedir.

A nın koordinatlarını denklemde yerine koyalım. Buradan c=26 bulunur.

A nın doğruya göre A' (a', b') simetriğinden geçen doğrunun denklemi $3x-4y+c'=0$ gibi olacaktır.

$\frac{26+c'}{2} = 12 \Rightarrow c' = -2$ dir.

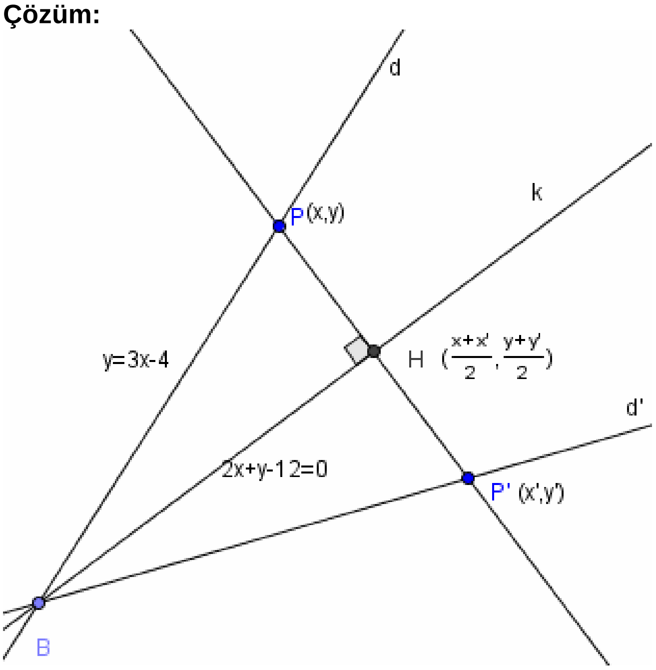
A' den geçen doğrunun denklemi ; $3x-4y-2=0$ dır.
Noktanın koordinatlarını yerine koyalım: $3a'-4b'=2$

Ayrıca AA' doğrusu verilen doğruya dik olduğundan;
$\frac{b'-5}{a'+2} = -\frac{4}{3} \Rightarrow 4a'+3b'= 7$

Bu iki denklem ortak çözülürse A(34/25, 13/25) bulunur.

Örnek:
d: $y=3x-4$ doğrusunun k: $2x+y-12=0$ doğrusuna göre d' simetriğini bulalım.

Çözüm:



d doğrusu üzerinde değişken bir P(x,y) alalım.
d nin k doğrusuna göre simetriği d' ve P nin simetriği P'(x',y') olsun.

H noktasının koordinatlarını k doğru denkleminde yerine koyalım.

$2.\frac{x+x'}{2} + \frac{y+y'}{2} = 12 \Rightarrow 2x+y = 24-2x'-y'$

Ayrıca PP' doğrusu k doğrusuna dik olduğundan;
$\frac{y-y'}{x-x'} = \frac{1}{2} \Rightarrow x-2y = x' - 2y'$

Bu iki denklemden x ve y yi x' ve y' cinsinden bularak;
$x=\frac{48-3x'-4y'}{5}$, $y=\frac{24-4x'+3y'}{5}$ değerleri d doğrusunun denkleminde yerine konursa;
$x'+3y'=20$ yani d' doğrusunun denklemi; $x+3y=20$ olarak bulunur.

Örnek:
(E) : $y=x^2$ parabolünün d:$x-2y+6=0$ doğrusuna göre (E') simetriğinin denklemini bulalım ve problemi GeoGebra programında çizimle doğruluğunu kontrol edelim.

Çözüm:

(E): $y=x^2$ parabolü üzerinde değişken bir P(x,y) alalım.
(E) nin d doğrusuna göre simetriği (E') ve P nin simetriği P'(x',y') olsun.

[PP'] nın H orta noktasının koordinatları H$(\frac{x+x'}{2},\frac{y+y'}{2})$ dir. Bu noktanın koordinatlarını $x-2y+6=0$ doğru denkleminde yerine koyalım.

$\frac{x+x'}{2} - 2.\frac{y+y'}{2} = -6 \Rightarrow x-2y=-x'+2y'-12$

Ayrıca PP' doğrusu simetri doğrusuna dik olduğundan;
$\frac{y-y'}{x-x'} = -2 \Rightarrow 2x+y=2x'+y'$

Bu iki denklemden x ve y yi x' ve y' cinsinden bularak;
$x=\frac{3x'+4y'-12}{5}$, $y=\frac{4x'-3y'+24}{5}$ değerleri $y=x^2$ parabol denkleminde yerine koyarsak;

$\frac{4x'-3y'+24}{5} = \left(\frac{3x'+4y'-12}{5}\right)^2$

$\Rightarrow (3x'+4y'-12)^2 = 5(4x'-3y'+24)$

yani parabolün simetriği olan eğrinin denklemi
$(3x+4y-12)^2 = 5(4x-3y+24)$ olarak bulunur.

Problemin GeoGebra programı ile çözüm dosyası **simetri_y_esit_x_kare.ggb** dir.