İFL DOĞAL SAYILAR-TAM SAYILAR İLE İLGİLİ ÇALIŞMA SORULARI (2009)

Doğal Sayılarda Basamak Analizi, İşlemler, Faktöryel :

01. AB ile BA iki basamaklı doğal sayılardır.AB+BA=165 olduğuna göre; AB şeklinde kaç tane doğal sayı yazılabilir?
C: 4

02. ABC üç, BC iki basamaklı doğal sayılardır.ABC=21.(BC) olduğuna göre; ABC biçiminde kaç tane doğal sayı vardır?
C: 8

03. abc üç basamaklı, ab iki basamaklı sayılardır. abc+ab=402 dir.Buna göre a,b,c rakamlarını kullanarak kaç tane üç basamaklı sayı yazılabilir?
C: 46

04. ABC ve BAC üç basamaklı doğal sayılardır. ABC-BAC=540 ise ABC üç basamaklı kaç tane sayı yazılabilir?
C: 30

05. m=abab ve n=cdcd onluk sistemde dört basamaklı iki doğal sayıdır.m+n sayısının tam kare olmasını (m,n) sıralı ikilileri için, a.b.c.d en çok kaç olabilir?
C: 600
YG: Sayı çözümlemesinden ab+cd=101 a+c=9 ve b+d=11 sayıları birbirine yakın seçilmeli.a=4,b=5,c=c,d=6, a.b.c.d=600

06. İki ve üç basamaklı sayılarla ilgili olarak; $ABC=(DE)^2$; $CBA=(ED)^2$ eşitliklerini sağlayan ABC sayılarını bulunuz.
C: 121, 441, 144,961, 169

07.T=1!+2!+3!+...+1998! toplamının son iki basamağındaki rakamlar toplamı kaçtır?
C: 4

08. T=1.1!+2.2!+...+1000.1000! toplamını en kısa biçimde ifade ediniz.
C: 1001!-1

09. $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+...+\frac{99}{100!}$ toplamını bulunuz.

C: $1-\frac{1}{100!}$

10. Dört basamaklı sayının rakamlarının ters sırada yazılmasıyla elde edilen dört basamaklı sayı, ilk verilen sayının dört katıdır.Bu sayı kaçtır?
C: 2178

11. $A=\{x \mid x=\frac{3n+21}{n+3}, n\in N\}$ kümesi veriliyor.$B=A\cap N$ kümesini bulunuz.

12. x ve y iki basamaklı sayılar olup x<y dir.xy çarpımı 2 ile başlayan dört basamaklı bir sayıdır.Eğer bu 2 rakamını silersek geriye kalan üç basamaklı sayı x+y ye eşit oluyor.Bu özelliğe sahip kaç tane (x,y) ikilisi vardır?
C: {(24,88),(30,70)}

13. m ve n doğal sayılar olmak üzere, $2n^2-36=m^2-m.n$ denklemini sağlayan (m,n) ikililerini bulunuz.
C: {(2,4), (7,5) }

14. m,n pozitif doğal sayılar olmak üzere, n+(n+1)+(n+2)+...+(n+m) = 1000 eşitliğini sağlayan (m,n) sıralı ikililerini bulunuz.
C: {(4,198),(15,55),(24,28)}

15. Rakamlarının sayı değerleri çarpımı 90 olan kaç tane beş basamaklı pozitif tam sayı vardır?
C: 23351, 63511, 92511 sayısının rakamları yer değiştirerek 180 tane.

16. Bir çiftlikteki tavşanların sayısı Mart ayında bir tam karedir.Tavşanların sayısı Nisan ayında 100 tane artarak sayısı, bir tam kareden 1 fazla olmuştur.Mayıs ayında tavşan sayısı, yine 100 adetlik bir artıştan sonra yeniden tam kare oluyor.Buna göre, tavşanların Mart ayındaki sayısı kaçtır?
C: 49^2

17. Bir üç basamaklı sayının orta rakamı silinince elde edilen iki basamaklı sayı, verilen sayıdan 7 defa daha küçük oluyor.Verilen sayının rakamlar toplamı kaçtır?
C: 6

18. a,b,c pozitif doğal sayılar olmak üzere; 5a+4b+3c=601ise a nın alabileceği en büyük değer kaçtır?
C: 118

19. a ve b doğal sayılar için, 5a+3b=600 ise a nın alacağı kaç farklı değer vardır?
C: 41

20. Rakamları farklı, iki basamaklı ve birbirinden farklı dört doğal sayının toplamı 314 ise sayıların en küçüğü en az kaçtır?

21. $a,b\in N$ için $a^2-b^2=127$ olduğuna göre tüm a,b doğal sayılarını bulunuz.
C: a=64, b=63

22. a ve b sıfırdan farklı doğal sayılar olmak üzere, 2ab+a=6b+14 ise b nin en büyük değeri kaçtır?
C: a=4 için b=5 dir.

23. $x,y,z\in N^+$ olmak üzere, 4xy=9z ise x+y+z toplamının en küçük değeri kaçtır?
C: 10

24. $a,b,c\in N^+$ olmak üzere $\frac{b}{c}=\frac{28a-48}{3}$ ise abc çarpımının en küçük değeri kaçtır?
C: 36

25. a) xy+x+y=77 eşitliğini sağlayan tüm (x,y) doğal sayı ikililerini bulunuz.
b) xy-x-y=1985 eşitliğini sağlayan (x<y) tüm (x,y) doğal sayı ikililerini bulunuz.

26.

$$
\begin{array}{r}
\,3\, \\
\times\quad *\,7 \\
\hline
\,\,* \\
+\;*\,0\,*\,*\;\; \\
\hline
\,\,*\,*\,8
\end{array}
$$

Yukarıdaki işlemde her * bir rakamı göstermektedir.Çarpımın rakamlar toplamı kaçtır?

27.

$$
\begin{array}{r}
A \\
A\;B \\
+\quad A\;B\;C \\
\hline
B\;C\;B
\end{array}
$$

Yukarıdaki A, B, C rakamları birbirinden farklıdır.Buna göre; ABC üç basamaklı sayısını bulunuz.

Doğal Sayılarda Bölme, Bölünebilme, Asal Sayılar, Asal Çarpanlara Ayrılış , Bölenlerin Sayısı ve Toplamı:

01. x ve y birbirinden farklı asal sayılardır. m pozitif bir tam sayı olmak üzere; $a=x^m.y^m$ sayısının tam sayı bölenleri sayısı 32 ise, a nın en küçük değeri kaçtır?

02. İki asal sayının toplamı 99 ise bu iki asal sayının çarpımı kaçtır?

03. p ve q farklı asal sayılar, a ve b farklı pozitif tam sayılardır.$n=p^a.q^b$ olmak üzere, n^2 sayısının pozitif bölenleri sayısı 81 ise, n^3 sayısının pozitif bölenleri sayısı kaçtır?
C: 160

04. $21^6 - 7^6$ sayısının pozitif bölenleri sayısı ve pozitif bölenleri toplamını bulunuz.

C: a nın pozitif bölenleri sayısı s(a)=4.8.2=64 tanedir.
a nın pozitif bölenleri toplamı da

$T(a)=\frac{2^4-1}{2-1}\cdot\frac{7^8-1}{7-1}\cdot\frac{13^2-1}{13-1}$ dir.

05. a=1800...0 sayısında kaç tane sıfır olmalıdır ki a nın pozitif bölenleri sayısı 126 olsun.Sonra a sayısının pozitif bölenleri toplamını bulunuz.
C: 5

06. $a=2^5.\alpha.\beta$ şeklinde asal çarpanlarına ayrılmış bir a doğal sayısının pozitif bölenleri toplamı, bu sayının 3 katına eşit olduğuna göre α, β sayılarını bulunuz.
C: $\alpha=3$, $\beta=7$

07. Bir a doğal sayısının pozitif bölenleri sayısı tek ise bu sayının **tam kare** olduğunu gösteriniz.

08. 946 ve 674 sayıları bir $x\in N^+$ sayısına bölündüğünde sırasıyla 10 ve 8 kalanları elde edildiğine göre x sayısı kaç olabilir?
C: 18

09. 7 ile, 13 ile bölünebilme kuralını çıkartınız.

10. İki rakamlı bir sayı 7 ile bölünebilirse, rakamlarının küpleri farkı da 7 ile bölünebildiğini ispatlayınız.

11. x ve y rakamları göstermek üzere a=xx128y sayısının
a) 9 a,
b) $4<x\leq 7$ ve $6\leq y$ olmak üzere 3 e,
c) 15 e bölünebilmesi için (x,y) ikililerini bulunuz.

12. $\frac{208!}{21^k}$ kesrinin bir tamsayı belirtmesi için k doğal sayısının en büyük değeri kaç olmalıdır?

13. 3 den büyük her asal sayının 6 ya bölümünden 1 veya 5 kalanı vereceğini gösteriniz.

14. 3 den büyük her asal sayının karesinin 1 eksiği 24 ile bölüneceğini gösteriniz.

15. n pozitif bir doğal sayı olmak üzere aşağıdakilerin doğruluğunu ispatlayınız.
a) $n(n^2+5)$ sayısı 6 ile bölünür.
b) n(n+1)(2n+1) sayısı 6 ile bölünür.
c) n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) sayısı 120 ile bölünür.
d) $n(n^2-49)(n^2+49)$ sayısı 60 ile bölünür.
e) $3^{2n+1}+2^{n+2}$ sayısı 7 ile bölünür.

16. Ardışık üç doğal sayının çarpımı, ortadaki sayı tam kare ise daima 60 a bölünür.

Doğal Sayılarla İlgili Bazı Problemlerin Bilgisayar Uygulaması:

Bazı matematik problemlerinin çözümünde bilgisayarı yardımcı olarak kullanabiliriz.Bunun yapabilmek için ya bir programlama dili (Basic, Pascal, C vs gibi), ya da hesaplama işlemlerini yapabilen bir yardımcı program (Excel, Matlab vs gibi) kullanabiliriz.

01. Bir doğal sayının asal sayı olup olmadığını bilgisayara bulduralım:

Çözüm:
a) Problemi bir Basic yorumlayıcısı olan GWBASIC programlama dili ile çözümleyelim.Bunun için, GWBASIC programını bilgisayarınıza indirip(Örneğin bunu İzmir Fen Lsesi Web sayfasından; http://www.ifl.k12.tr/projedosyalar/dosyalar.htm adresinden indirebilir, yine aynı sayfadan “Basic Programlama Dili Ders Notları” ndan faydalanabilirsiniz) aşağıdaki kodları yazınız ve her satırın sonunda (Enter) tuşuna basmayı unutmayınız.Sonra boş bir satırda **run** yazarak (Enter) tuşuna basınız veya **F2** tuşuna basarak direkt olarak çalıştırabilirsiniz.

10 CLS
20 INPUT"SAYINIZ";N
30 I=1
40 I=I+1:IF I>SQR(N) THEN 60
50 IF N MOD(I)=0 THEN 70 ELSE GOTO 40
60 PRINT N;" ASAL":END
70 PRINT N;" ASAL DEĞİL"

Not: GWBASIC programını ve ASALMI.BAS dosyasını bir klasöre; http://www.ifl.k12.tr/projedosyalar/dosyalar.htm adresinden kopyalayınız.Sonra GWBASIC dosyasının üzerine çift tıklayarak açınız.Ekrana gelen Basic ortamında, boş bir satırda LOAD"ASALMI.BAS" yazıp (Enter) tuşuna basarak, ilgili dosyayı yüklemiş olursunuz.Sonra da, boş bir satırda RUN yazarak (Enter) tuşuna basarak (ya da sadece F2 tuşuna basarak) programı çalıştırabilirsiniz.İsterseniz LIST komutuyla programın listesini ekrana getirerek, istediğiniz değişiklikleri yapabilir tekrar çalıştırabilirsiniz.

b) İstenen sayının asal olup olmadığını Matlab Programı ile de sorgulayabiliriz.Bunun için Matlab'ın komut satırına; örneğin 101 ve 1001 sayılarının asal olup olmadığını sorgulamak için; aşağıdaki komutları sırasıyla girelim.

```
>> isprime(101)
ans =
     1

>> isprime(1001)
ans =
     0
```

Buradan, 101 in asal sayı olduğunu, 1001 sayısının ise bileşik sayı olduğunu anlarız.

2. İstenen bir sayıya kadar olan tüm asal sayıları bilgisayar yardımıyla bulalım.

Çözüm:
a) GWBASIC Programı için aşağıdaki kodları girip çalıştırabilirsiniz.
10 CLS
20 INPUT"Kaça kadar asal sayıları istersin";N
30 FOR I=2 TO N
40 S=0
50 FOR J=2 TO SQR(I)
60 IF I MOD(J)=0 THEN S=S+1
70 NEXT J
80 IF S=0 THEN PRINT I;" ";
90 NEXT I

Not: GWBASIC programını ve KACASAL.BAS dosyasını bir klasöre; http://www.ifl.k12.tr/projedosyalar/dosyalar.htm adresinden kopyalayınız.Sonra GWBASIC dosyasının üzerine çift tıklayarak açınız.Ekrana gelen Basic ortamında, boş bir satırda LOAD"KACASAL.BAS" yazıp (Enter) tuşuna basarak, ilgili dosyayı yüklemiş olursunuz.Sonra da, boş bir satırda RUN yazarak (Enter) tuşuna basarak (ya da sadece F2 tuşuna basarak) programı çalıştırabilirsiniz

b) Matlab programının komut satırına; örneğin 100 e kadar olan asal sayıları yazdırmak **primes(100)** yazıp (Enter) tuşuna basmak yeterlidir.Bu durumda ekranda aşağıdaki görüntüyü izleyebilirsiniz.

```
>> primes(100)
ans =
  Columns 1 through 8
     2     3     5     7    11    13    17    19
  Columns 9 through 16
    23    29    31    37    41    43    47    53
  Columns 17 through 24
    59    61    67    71    73    79    83    89
  Column 25
    97
```

3. Kendisi haricinde, tüm pozitif bölenleri toplamı kendisine eşit olan doğal sayılara "***Mükemmel Sayı***" denir.İstenen doğal sayıya kadar olan mükemmel sayıları bulduran bir Basic programı yazalım.

Çözüm:
10 CLS
20 INPUT"Kaça kadar Mükemmel Sayılar Araştırılsın";N
30 FOR I=2 TO N
40 T=0
50 FOR J=1 TO INT(I/2)
60 IF I MOD(J)=0 THEN T=T+J
70 NEXT J
80 IF T=I THEN PRINT I
90 NEXT I

Not: GWBASIC programını ve MUKEMMEL.BAS dosyasını bir klasöre; http://www.ifl.k12.tr/projedosyalar/dosyalar.htm adresinden kopyalayınız.Sonra GWBASIC dosyasının üzerine çift tıklayarak açınız.Ekrana gelen Basic ortamında, boş bir satırda LOAD"MUKEMMEL.BAS" yazıp (Enter) tuşuna basarak, ilgili dosyayı yüklemiş olursunuz.Sonra da, boş bir satırda RUN yazarak (Enter) tuşuna basarak (ya da sadece F2 tuşuna basarak) programı çalıştırabilirsiniz.

4. "Hangi üç basamaklı sayıların, rakamlarının küpleri toplamı kendisine eşittir?" problemini GWBASIC programı ile bulalım.

Çözüm:
10 CLS
20 FOR A=1 TO 9
30 FOR B=0 TO 9
40 FOR C=0 TO 9
50 IF A^3+B^3+C^3=100*A+10*B+C THEN PRINT 100*A+10*B+C
60 NEXT C,B,A

Not: GWBASIC programını ve KUPSAYI.BAS dosyasını bir klasöre; http://www.ifl.k12.tr/projedosyalar/dosyalar.htm adresinden kopyalayınız.Sonra GWBASIC dosyasının üzerine çift tıklayarak açınız.Ekrana gelen Basic ortamında, boş bir satırda LOAD"KUPSAYI.BAS" yazıp (Enter) tuşuna basarak, ilgili dosyayı yüklemiş olursunuz.Sonra da, boş bir satırda RUN yazarak (Enter) tuşuna basarak (ya da sadece F2 tuşuna basarak) programı çalıştırabilirsiniz.

Taban Aritmetiği:

01. a) $(2013)_5$ sayısını 10 luk tabanda yazınız.

b) 2150 sayısını 5 lik tabanda yazınız.

02. a) $(232)-(133)=(?)_4$

b) $(421)_5-(342)_5=(?)_5$

c) $(324)_5 \cdot (34)_5=(?)_5$

d) $(12313)_4$ sayısının $(23)_4$ sayısına bölümünden elde edilen bölüm ve kalanı bulunuz.

e) $(114332)_5$ sayısının $(23)_5$ sayısına bölümünden elde edilen bölüm ve kalanı bulunuz.

f) $(1230102)_4$ sayısının $(203)_4$ sayısına bölümünden elde edilen bölüm ve kalanı bulunuz.

g) $(35,012)_7$ sayısını 10 luk sisteme çeviriniz.

h) $\frac{25}{8}$ sayısını 4 lük sisteme çeviriniz.

03. $(123)_a+(a23)_5=(bcd)_6$ ise a+b+c+d kaçtır?

04. x ve x+1 sayı tabanlarını göstermek üzere

$(2x4)_{x+1}=(400)_x$ ise x^x sayısının x^2 tabanındaki değerini bulunuz.

05. x-2, x ve x+3 sayı tabanını göstermek üzere;
$(34)_x=(23)_{x+3}$ ve $a\neq0$ için $(ab)_x=(ba)_{x-2} \Rightarrow a=?$

06. $2a^4+a^3+5$ (a>5) sayısının a tabanındaki yazılışı nedir?
C: (21005)

07. $(31xy)_7$ sayısı tek sayı olduğuna göre (x+y)'nin alabileceği değerler toplamı kaçtır?

08. $(10110101)_2$ sayısını 8 tabanına çeviriniz.

09. $(891)_{27}$ sayısını 3 tabanına çeviriniz.

10. 13 tabanında A=10, B=11 ve C=12 rakamını göstermek üzere , $2.(1AB+BBC)=(x)_{13} \Rightarrow$x kaçtır?

11. A=10 rakamını göstermek üzere,

$(A52)_x=1757 \Rightarrow x=?$

12.

$$\begin{array}{l|l} (444)_5 & (34)_5 \\ \cline{2-2} & \quad x \\ \cline{1-1} \quad k & \end{array}$$

Yukarıdaki bölme işleminde (x,k) kaçtır?

OBEB ve OKEK:

01. a, $b\in N^+$, a>b sayılarının her birinin OBEB'ine bölümlerinden elde edilen bölümleri toplamı 8 dir.ab çarpımı ise OBEB'in 60 katı olduğuna göre a ve b sayılarını bulunuz.
C: a=20, b=12

02. x.y=9072 ve OBEB(x,y)=18 olan x>y doğal sayılarını bulunuz.

03. a) a ve b sayıları için obeb(a,b)=6 ve okek(a,b)=72 ise a+b toplamı en az kaçtır?
b) İki doğal sayının obebi 18 ve okeki 360 olduğuna göre bu sayıların toplamı en az kaçtır?

04. Ortak bölenlerinin en büyüğü 1250 olan öyle iki a,b doğal sayısı bulunuz ki, a ve b nin pozitif bölenleri sayısı sırasıyla 21 ve 10 olsun.

05. OBEB(a,b)=20, OKEK(a,b)=420 olan (a>b) tüm a,b doğal sayılarını bulunuz.

06. Toplamları 651 ve OKEK inin OBEB ine bölümü 108 olan (a>b) tüm a,b doğal sayılarını bulunuz.

07. OKEK(a,b)=1260 olan öyle $a,b\in N$ sayıları bulunuz ki, 7a=15b olsun.

08. Ortak katlarının en küçüğü 90 olan iki sayıdan biri 15 tir.Diğeri hangi sayılar olabilir?

09. OKEK(a,b)=1768, a+b=240 (a>b) olan a,b doğal sayılarını bulunuz.
10. 35, 20 ve x doğal sayılarının obebi 5, okeki 420 olduğuna göre en küçük x doğal sayısı kaçtır?

11. 15840 sayısından en küçük hangi doğal sayı çıkarılmalıdır ki, kalan sayı 12 ve 28 ile tam bölünsün?

12. Boyutları 6 cm, 8 cm, 10 cm olan dikdörtgenler pirizması biçimindeki tuğlalar hiç kırılmadan yan yana ve üst üste konarak içi dolu en küçük hacimli küp yapılmak isteniyor.Buna göre en az kaç tuğla gereklidir?

13. okek(49,42,63)=okek(9,21,x) isex in en küçük değeri kaçtır?

14. 72, 108 ve x doğal sayılarının obebi 12, okeki 432 dir.Buna göre x in alabileceği kaç farklı değeri vardır?

15. OKEK(18,30,x)=360 ve OBEB(18,30,x)=6 dır.Buna göre en küçük $x\in N$ kaçtır?

16. Aralarında asal olan a ve b sayılarının okeki 126 dır. $\frac{72}{a}+b=11$ ise a kaçtır?

17. a=5!+6! ve b=7!+8! olduğuna göre; obeb(a,b) kaçtır?

18. a ile b, 1 den büyük ve aralarında asal iki sayıdır. obeb(a,b)=7-m ve okek(a,b)=88m ise a+b toplamının en büyük değeri kaçtır?

Tam Sayılar:

01. x,y,z eşit olmayan pozitif tam sayılar ise $x+y^2+x^3=a$ eşitliğini sağlayan en küçük a kaçtır?
C: 8

02. xy+3x-5y=17 denkleminin tam sayılar kümesindeki (x,y) çözüm ikililerini bulunuz.
C: {(7,-2),(6,-1),(3,-4),(4,-5)}

03. x,y,z tam sayı olmak üzere;
$x^2+xyz+y^2z^2=12$
$x+yz=2$
$y^2-2yz=8$ denklem sisteminin (x,y,z) çözüm üçlülerini bulunuz.
C: {(4,2,-1),(-2,4,1),(-2,-4,-1)}

04. $x^2+(x+1)^2+(x+2)^2=y^2$ denkleminin x, y tamsayı olacak şekilde kaç tane (x, y) çözüm takımı vardır?

Tamsayılarda Bölünebilme ve Modüler Aritmetik:

Modüler Aritmetik İle İlgili Bazı Özellikler:

a) $a \equiv b \pmod m \Rightarrow a \pm c \equiv b \pm c \pmod m$ dir.
b) $a \equiv b \pmod m \Rightarrow a.c \equiv b.c \pmod m$ dir.
c) $a \equiv b \pmod m$ ve $c \equiv d \pmod m$ ise
$a \pm c \equiv b \pm d \pmod m$ dir.
d)) $a \equiv b \pmod m$ ve $c \equiv d \pmod m$ ise
$a.c \equiv b.d \pmod m$ dir.
e) $a \equiv b \pmod m \Rightarrow a^n \equiv b^n \pmod m$ dir.

Fermat Teoremi:
p asal olmak üzere p a tam sayısını bölmüyorsa;
$a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$ dir.

Örneğin; $10^6 \equiv 1 \pmod 7$

Wilson Teoremi:
p asal sayı ise; $(p-1)! \equiv -1 \pmod p$ dir.

Örneğin; $12! \equiv -1 \pmod{13} \Rightarrow 13 \mid (12!+1)$ dir.

Euler Φ Fonksiyonu ve Euler Teoremi:
m>1 olmak üzere, m den küçük ve m ile aralarında asal olan sayıların sayısına, $\Phi(1)=1$ olmak üzere $\Phi(m)$ fonksiyonu denir.
m ile a aralarında asal olmak üzere (yani (m,a)=1 ise),
$a^{\Phi(m)} \equiv 1 \pmod m$ dir.

Euler Φ Fonksiyonu İle İlgili Özellikler:

a) p asal bir sayı ise; $\Phi(p)=p-1$ dir.
b) m ve n aralarında asal sayılar ise; $\Phi(mn)=\Phi(m)\Phi(n)$ dir.
c) n pozitif tam sayısının asal çarpanlara ayrılmış biçimi;
$n=p_1^a . p_2^b \ldots p_k^c$ ise;
$\Phi(n)=n(1-\frac{1}{p_1}).(1-\frac{1}{p_2})\ldots(1-\frac{1}{p_k})$ dir.

Örneğin;
a) $\Phi(2)=1$, $\Phi(3)=2$, $\Phi(4)=2$, $\Phi(5)=4$, $\Phi(10)=4$, $\Phi(37)=36$ dır.
b) $7^{\Phi(10)} \equiv 7^4 \equiv 1 \pmod{10}$ dur.
c) $\Phi(100)=\Phi(4.25)=\Phi(4).\Phi(25)=2.20=40$ tır.
d) $\Phi(100)=\Phi(2^2 .5^2)=100(1-\frac{1}{2}).(1-\frac{1}{5})=100.\frac{1}{2}.\frac{4}{5}=40$
e) $\Phi(1000)=\Phi(2^3 .5^3)=1000(1-\frac{1}{2}).(1-\frac{1}{5})$
$=1000.\frac{1}{2}.\frac{4}{5}=400$ bulunur.

Doğrusal Denklikler (Lineer Kongruanslar):

*a,b,x,m (m>1) tamsayılar olmak üzere, **$ax \equiv b \pmod m$** biçimindeki denkliklere denir.*

Bu türdeki denkliklerin çözümü için genellikle denklemin her iki tarafı a nın m modundaki çarpmaya göre tersi ile çarpılarak (yani a ile hangi tamsayıyı çarpalım ki m modunda 1 yapsın) denklem $x \equiv b' \pmod m$ biçimine getirilerek çözüme gidilir.

Örnek:
$3x \equiv 7 \pmod{11}$ doğrusal denkliğinin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm: Önce x in katsayısını 1 yapmak için 3 ü kaç ile çarpmamız gerektiğini düşünelim. Kısa bir denemede 4 ile çarpmamız gerektiğini buluruz.

$4 \,/\, 3x \equiv 7 \pmod{11} \Rightarrow x \equiv 6 \pmod{11} \Rightarrow x= 11k + 6 \; (k \in Z)$

Örnek:
$8x \equiv 6 \pmod{15}$ doğrusal denkliğinin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:
$8x \equiv 6 \pmod{15} \Rightarrow 2 \,/\, 8x \equiv 6 \pmod{15} \Rightarrow x \equiv 12 \pmod{15}$
$\Rightarrow x=15k+12$

Not: $8x \equiv 6 \pmod{15}$ denkliğinde her iki tarafı 2 ye bölerek çözüme gitsek; $4x \equiv 3 \pmod{15} \Rightarrow 4 \,/\, 4x \equiv 3 \pmod{15}$
$\Rightarrow x \equiv 12 \pmod{15} \Rightarrow x=15k+12$ aynı sonucu buluruz. Ancak burada 8 ile 15 in aralarında asal olduğuna dikkat ediniz!

Örnek:
$9x \equiv 6 \pmod{15}$ doğrusal denkliğinin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:
9 ile hangi sayıyı çarpalım ki 1yapsın? Bunu denersek 9 ile {0, 1,2,3,…,14} kümesinin elemanları ile çarptığımızda 15 modunda 0,3,6,9,12 sayılarından birini elde ederiz yani 1 i bulamayız.Acaba bunun sebebi 9 ile 15 aralarında asal olmadığından olabilir mi?

Peki şimdi ne yapmalıyız?
Mesela denkliği denklem olarak yazsak, yani;
$9x \equiv 6 \pmod{15} \Rightarrow 9x=15k+6 \Rightarrow 3x=5k+2 \Rightarrow 3x \equiv 2 \pmod 5$
$2 \,/\, 3x \equiv 2 \pmod 5 \Rightarrow x \equiv 4 \pmod 5 \Rightarrow x = 5n+4$ bulunur.

Not: $9x \equiv 6 \pmod{15}$ denkliğinde 9 ile 15 aralarında asal olmadığından her iki tarafı 3 e bölmek hataya sebep olur.

Örnek:
$2x \equiv 4 \pmod 5$, $3x \equiv 1 \pmod 7$ denklik sisteminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:
$2x \equiv 4 \pmod 5 \Rightarrow 3 \,/\, 2x \equiv 4 \pmod 5 \Rightarrow x \equiv 2 \pmod 5$
$\Rightarrow x=5k+2$
Bu değeri ikinci denklemde yerine koyalım;

$3(5k+2)\equiv 1 \pmod 7 \Rightarrow 15k+6\equiv 1 \pmod 7 \Rightarrow$
$k\equiv -5\equiv 2 \pmod 7 \Rightarrow k=7n+2$.
Bunu yukarıdaki denklemde koyarsak;
$x=5(7n+2)+2 \Rightarrow x=35n+12$ bulunur.

Diyafon (Diaphont) Denklemleri:

*Çözüm kümesi tamsayı olan denklemlere **<u>diyafon denklemleri</u>** denir.*

Örneğin ; çözüm kümesi tamsayılar olan;
$5x+7y=41$ birinci dereceden (lineer=doğrusal),
$6x^2+5y^2=74$ ikinci dereceden diyafon denklemleridir.

Birinci dereceden $ax+by=c$ gibi diyafon denklemlerinin çözümü için bazı kurallar ve çözüm yöntemleri vardır.

Bunlardan birkaç tanesi aşağıda verilmiştir.

a) (a,b)=d (yani a ile b tamsayılarının en büyük ortak böleni d) olmak üzere; ax+by=c denkleminin tamsayılarda çözümünün var olması ancak ve ancak $d \mid c$ olmasıdır.

b) Denklemin bir özel çözümü $(x_\circ, y_\circ)$ ise genel çözümü k bir tamsayı olmak üzere;

$x = x_\circ + (b/d).k$ ve $y = y_\circ - (a/d).k$ biçimindedir.

c) Denklemi önce a modunda yazarak x li terimi yokederek y yi bulur, sonra bu değeri denklemde yerine koyarak x i buluruz.İstersek bu işlemin tersini yaparız, yani denklemi önce b modunda yazarak y li terimi yokederek x i bulur, sonra bu değeri denklemde yerine koyarak y yi buluruz.

Örnek:
$5x+7y=41$ diyafon denklemini çözelim.

Çözüm:
1.Yol: Önce denklemin bir özel çözümünü bulalım:
Bunun için ya sırayla değerler vererek deneme yaparız –ki bu bazen çok zaman alır, veya değişkenlerden birini çekerek değer veririz.Mesela x i çekelim;
$x = \frac{41 - 7y}{5} = 8 + \frac{1 - 7y}{5}$

Burada $y_\circ=3$ için $x_\circ=4$ özel bir çözüm bulunur.

Buna göre genel çözümler;

$x= x_\circ+ (b/d).k = 4 + 7k$ ve

$y = y_\circ -(a/d).k=3 – 5k$ olarak bulunur.

2.Yol:
$5x+7y=41 \Rightarrow 5x\equiv 6 \pmod 7 \Rightarrow x\equiv 4 \pmod 7 \Rightarrow x=7k+4$
Bu değeri denklemde yerine koyalım;
$5(7k+4)+7y=41 \Rightarrow 35k+7y=21 \Rightarrow y=3-5k$ olarak bulunur.

Örnek:
$9x-4y+7z=14$ diyafon denklemini çözelim.

Çözüm:
$9x-4y+7z=14 \Rightarrow 2x-4y\equiv 0 \pmod 7 \Rightarrow x\equiv 2y \pmod 7$

Burada y=t olsun $x=7k+2t$ olur.Bunları ilk denklemde yerine koyarsak; $z=2-9k-2t$ olur.Yani çözüm kümesi;
$Ç=\{(7k+2t,\ t,\ 2-9k-2t) \mid k,t\in Z\}$ bulunur.

01. $x\equiv 2 \pmod 5$ denkliğini sağlayan tüm $x\in Z$ kümesini bulunuz.

02. $37\equiv 13 \pmod x$ denkliğini sağlayan tüm $x\in Z$ kümesini bulunuz.

03. $11^2+12^2+13^2+14^2+15^2\equiv x \pmod{10} \Rightarrow x=?$

04. $1^3+2^3+3^3+...+36^3$ toplamının 37 ye tam bölünebileceğini gösteriniz.

04. $4^3+5^3+6^3+...+46^3\equiv x \pmod{47} \Rightarrow x=?$

05. 10! Sayısının 11 modundaki değeri kaçtır?

06. $1!+2!+3!+...+2002!\equiv x \pmod{15} \Rightarrow x=?$

07. $53^5+54^5+55^5+56^5+57^5$ sayısının son rakamı kaçtır?

08. 7^{2002} sayısının 9 a bölümünden kalan kaçtır?

09. $2222^{5555}+5555^{2222}$ sayısının 7 ye bölümünden kalan kaçtır?

10. *(Çinlilerin Kalan Problemi)*
Bir Çinli, sepetindeki yumurtaları 6 şar 6 şar saydığında 3, 8 er 8 er saydığında 5, 12 şer 12 şer saydığında 9 yumurta arttığını görüyor.Bu sepette 100 ile 130 arasında yumurta olduğu bilindiğine göre, yumurta sayısı kaçtır?
C: 117

11. 10 a bölündüğünde 9, 12 ye bölündüğünde 7, 15 e bölündüğünde 4 kalanını veren tüm doğal sayılar kümesini bulunuz.
C: $a=19+60k$ $(k\in N)$

12. 8 e bölümünden 4, 9 a bölümünden 5 ve 12 ye bölümünden 8 kalanını veren en küçük üç basamaklı doğal sayı kaçtır?

13. 3 e ve 5 e bölümünden 2 kalanını, 11 e bölümünden 4 kalanını veren en büyük 3 basamaklı sayı kaçtır?

14. Bir sepetteki sümbüller 12 şerli demet yapılırsa 3, 15 erli demet yapılırsa 6 ve 10 arlı demet yapılırsa 1sümbül artıyor. Bu sepette 500 ile 600 arası sümbül olduğuna göre sepette kaç tane sümbül vardır?

15 a,b,c ve x birer doğal sayı olmak üzere;
$x=12a-4=15b+11=20c-44$ eşitliğini gerçekleyen en küçük x için b kaçtır?

16. $123^{2006}+2006!-2006$ sayısının son rakamı kaçtır?

17.a) $8x\equiv3(\text{mod } 11)$ b) $15x\equiv18(\text{mod } 24)$ denkliklerini sağlayan en küçük 3 basamaklı sayı kaçtır?

18. a) $7^x\equiv4$ (mod 17) denkliğinde x in alacağı en küçük pozitif tam sayı kaçtır?
b) $5^n\equiv2$ (mod 7) denkliğinde n nin alacağı üç basamaklı en büyük tam sayı kaçtır?

19. $2x+3y-5z=28$ denkleminin tamsayılardaki çözüm kümesini bulunuz.

20. 6 ve 8 e bölündüğünde 5 kalanını veren,
a) En küçük doğal sayıyı
b) 250 ile 300 arasındaki doğal sayıları
c) Tüm doğal sayıları veren formülü bulunuz.

21. 6^{2006} sayısının;
a) 7 ye bölümünden kalan kaçtır?
b) 11 e bölümünden kalan kaçtır?
c) Son rakamı kaçtır?
d) Son iki basamağını oluşturan sayı kaçtır?

22. $\forall n\in N^+$ için $(2n+1)(n^2+n)(3n^2+3n-1)$ sayısının daima 30 a bölünebileceğini ispatlayınız.

23. $\forall n\in N^+$ için $3^{6n}-2^{6n}$ sayısının 35 e bölünebileceğini gösteriniz.

24. $n\in N^+$ için 66^{6n-1} sayısının 7 ye bölümünden kalanı bulunuz.

25. $2^{55}+1$ sayısının 11 ile bölünebileceğini gösteriniz.

26. $n\in N$ olmak üzere $S=1^n+2^n+...+8^n$ sayısının 5 ile bölümünden kalanı bulunuz.

27. $S=27195^8-10887^8+10152^8$ sayısının 26460 ile tam bölünebildiğini gösteriniz.

28. 37.256.9375 çarpımından elde edilen sayının basamak sayısı x, asal olmayan tam sayı bölenlerinin toplamı y ise x-y kaçtır?

29. n pozitif bir tam sayı olmak üzere; $3.2^{6n+3}+2.3^{4n+1}$ toplamının 9 ile bölümünden kalan kaçtır?

30.Her 6 günde bir harçlık alan bir öğrenci, ilk harçlığını pazartesi günü aldığına göre; 25 inci harçlığını hangi gün alır?

31. Günde 7 saat çalışan bir işçi, her 6 günlük çalışma sonunda bir gün izin kullanıyor.Buna göre; salı günü işe başlayan işçi, 185 inci saati çalıştığında hangi gündedir?

32. Haftanın 7 günü iki öğretmenin nöbet tuttuğu bir okulda Mehmet'e 12 günde, Hasan'a 10 günde bir nöbet gelmektedir.İkisi beraber 12. nöbetini pazar günü tuttuğuna göre 5. nöbetini hangi gün tutarlar?

33. Z/7 de,
$2x+3y=4$
$5x+2y=6$ denklem sistemini sağlayan (x,y) ikililerini bulunuz.

34. Z/9 da $f(x)=2x+5$ ve $g(x)=7x+4$ fonksiyonları tanımlanmıştır.Buna göre aşağıdaki fonksiyonları Z/9 da bulunuz.
a) fog(x) b) $(f^{-1}og)^{-1}(x)$

35. $x^2+7x\equiv15$ (mod x) denkliğini sağlayan x değerleri toplamını bulunuz.

36. $x-y\equiv7$ (mod 9)
$xy\equiv4$ (mod 9)
$x^3-y^3\equiv$ k (mod 9) denkliklerini sağlayan k değerini bulunuz.

37. a) $a=3^{4n+2}$ $n\in Z^+$ sayısının,
b) $b=1!^{1!}+3!^{3!}+5!^{5!}+...+95!^{95!}$ sayısının,
c) $c=1+2^{100}+3^{100}+4^{100}+...+9^{100}$ sayısının birler basamağı kaçtır?

38. $2x+4\equiv\frac{1}{x}$ (mod 5) denkliğini sağlayan en küçük pozitif tam sayısı kaçtır?

39. $x\equiv2(\text{mod } 7)$, $x\equiv3(\text{mod } 5)$, $x\equiv4(\text{mod } 6)$ denkliklerini sağlayan en küçük pozitif x tamsayısını kaçtır?

40. $a\in Z$ olmak üzere a^2+a sayısının 3 e bölümünden kalanın 1 olamayacağını ispat ediniz.

41. Z/6 da $\frac{x}{5}+\frac{3}{x}=2$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

42. Z/7 de a) $x^2=2$ b) $x^3=6$ c) $x^3=4x$ denklemlerinin çözüm kümesini bulunuz.

43. Her $n\in N$ için a) $5|n^5-n$ b) $7|n^7-n$ c) $13|n^{13}-n$ olduğunu ispat ediniz.

44. $1^{2006}+2^{2006}+3^{2006}+...+2006^{2006}$ sayısının birler basamağı kaçtır?

45. $(((7^7)^7)^7...)^7$ biçiminde 7 nin 7. kuvvetlerini 500 defa aldığımızda elde edilen sayının birler basamağı kaçtır?
C: 23

46. İç içe 2006 parantezden oluşan
$(...(((6^8)^8)^8)...)^8$ sayısı göz önüne alınıyor.
a) Sayının son rakamı kaçtır?
b) Sayının son iki basamağını oluşturan sayı kaçtır?

47. x iki basamaklı, y üç basamaklı pozitif tam sayılardır. $2^x \equiv 7^y \equiv 4$ (mod 9) denkliğinde x+y nin alabileceği en küçük değer kaçtır?
C:115

48. $1111^{6666}+7777^{9999} \equiv x$ (mod 14) ise x kaçtır?
C: 8

49. $10^x \equiv 2$ (mod 7) denkliğini sağlayan iki basamaklı en büyük sayı kaçtır?
C: 98

50. $(-1999)^{-20002} \equiv x$ (mod 13) ise x kaçtır?
C:9

51. $x^2 \equiv x+12$ (mod 41) sağlayan en küçük iki pozitif tam sayının toplamı kaçtır?
C: 42

52. $13x+5 \equiv 12$ (mod 64) denkliğini sağlayan en küçük pozitif iki tam sayının toplamı kaçtır?
C: 134

53. $20^{20} \equiv x$(mod 25) ise x kaçtır?
C: 0

54. $2^{2000}+4^{1003}+8^{4004} \equiv x$ (mod 2^{41}) ise x kaçtır?
C: 0

55. $12^{104} \equiv x$ (mod 14) ise x kaçtır?
C: 4

56. $110^{0!+1!+2!+..+125!}$ sayısının 7 ile bölümünden kalan kaçtır?
C: 3

57. 8^{2001+x} sayısının birler basmağının 6 olması için x in alabileceği en küçük pozitif tam sayı kaçtır?
C: 3

58. $6x \equiv 24$ (mod 66) denkliğini sağlayan en küçük üç pozitif tam sayının toplamı kaçtır?
C: 45

59. $11x+3 \equiv 17$ (mod 186) denkliğini sağlayan en büyük iki negatif tam sayının toplamı kaçtır?
C: -454

60. $x^{-1}+x \equiv 3$ (mod 5) denkliğini sağlayan en küçük iki pozitif tam sayının toplamı kaçtır?
C: 13

61. $1^3+2^3+3^3+...+110^3 \equiv x$ (mod 113) olduğuna göre; x kaçtır?
C: 9

62. $(a+1)^5+(a+2)^6 \equiv 0$ (mod a) ise a nın alacağı tam sayı değerleri toplamı kaçtır?
C: 83

63. $\left(\frac{4}{3}\right)^{1999} - \left(\frac{3}{4}\right)^{2001} \equiv k$ (mod 11) ise k kaçtır?
C: 0

64. $4-x \equiv 0$ (mod a)
$x+6 \equiv 1$ (mod a) olduğuna göre; a nın alacağı tam sayı değerleri toplamı kaçtır?
C: 12

65. x^2-2x-8 ifadesini Z/3 te çarpanlarına ayırınız.

66. $1^5+2^5+3^5+...+15^5$ toplamının 17 ile bölümünden kalan kaçtır?
C: 1

67. $(0!)^{0!}+(1!)^{1!}+(2!)^{2!}+...+(99!)^{99!}$ toplamının birler basamağı kaçtır?
C: 8

68. x>2000 olmak üzere; $3^x \equiv 24$ (mod 25) denkliğini sağlayan x in en küçük pozitif tam sayı değeri kaçtır?
C: 2010

69. $1 \le a \le 100$ olmak üzere; $a^{60} \equiv 1$ (mod 77) denkliğini sağlayan kaç tane a tam sayısı vardır?
C: 78

70. $1^{1!}+2^{2!}+3^{3!}+...+13^{13!}$ sayısının 13 ile bölümünden kalan kaçtır?
C: 2

71. $p_1 < p_2 < p_3 < ... < p_{24}$ sayılar [3,100] aralığındaki asal sayıları göstermek üzere;
$p_1^{99!}+p_2^{99!}+p_3^{99!}+...+p_{24}^{99!} \equiv a$ (mod 100) denkliğini sağlayan en küçük a pozitif tam sayısı kaçtır?
C: 48

72. $1+2+2^2+2^3+...+2^n$ toplamının 77 ile bölünmesini sağlayan 100 den büyük en küçük tam sayı kaçtır?

YG: $r \neq 1$ için; $1+r+r^2+r^3+...+r^{n-1} = \frac{r^n - 1}{r - 1}$ dir.
C: 119

73. $a=10^{10^7}+10^{10^6}+10^{10^5}+10^{10^4}$ sayısının 7 ile bölümünden kalan kaçtır?
C: 2

74. $1^{1991}+2^{1991}+3^{1991}+...+1991^{1991}$ sayısının birler basamağındaki rakam kaçtır?