

İZMİR FEN LİSESİ 10 MATEMATİK
ÇALIŞMA SORULARI: (Çarpanlara Ayırma)

01. Aşağıdaki polinomlardan hangilerinin asal polinom olduğunu belirtiniz.

- a) $7x^2+7$ b) $7x^2-13$ c) $13x^2+17$ d) x^2-x+7
e) x^2+x-7 f) x^3+19 g) x^4+4 h) x^5-8x^3+x

02. Aşağıdaki ifadeleri çarpanlara ayırınız.

a) $a^2+ab-3a-3b$

C: $(a-3)(a+b)$

b) $2x^3+4x^2y-6xy^2$

C: $2x(x+3y)(x-y)$

c) $x^4-3x^3-6x^2+14x+12$

C: $(x-3)(x+2)(x^2-2x-2)$

d) $xyz-xy-xz-yz+x+y+z-1$

C: $(x-1)(z-1)(y-1)$

e) $x^3-7x^2+7x+15$

C: $(x-5)(x-3)(x+1)$

f) $4x^6-4x^4y^2+12x^3y+x^2y^4-6xy^3+9y^2$

C: $(2x^3+3y-x^2)^2$

g) $(x^2-x)^2-2x^2+2x+4$

C: $(x-2)^2(x+1)^2$

h) $x^2+y^2+2x+2y+2xy+1$

C: $(x+y+1)^2$

i) $x^2+y^2-4z^2+2xy+3xz+3yz$

C: $(x+y+4z)(x+y-z)$

j) $x^{10}+x^5-2$

C: $(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)(x+\sqrt[5]{2})$

$(x^4-\sqrt[5]{2}x^3+\sqrt[5]{4}x^2-\sqrt[5]{8}x+\sqrt[5]{16})$

k) $x^4+y^4+z^4-2x^2y^2-2x^2z^2-2y^2z^2$

C: $-(x+y+z)(y+z-x)(x+z-y)(x+y-z)$

l) $(x^2+x+3)(x^2+x+4)-12$

C: $x(x+1)(x^2+x+7)$

m) $(xy+xz+yz)(x+y+z)-xyz$

C: $(x+z)(x+y)(y+z)$

n) $2a^2b+4ab^2-a^2c+ac^2-4b^2c+2bc^2-4abc$

C: $(2b-c)(a-c)(a+2b)$

o) $x(y-2z)^2+y(x-2z)^2-2z(x+y)^2+8xyz$

C: $(x+y)(y-2z)(x-2z)$

p) x^3+5x^2+3x-9

C: $(x-1)(x+3)^2$

q) $x(x+1)(x+2)(x+3)+1$

C: $(x+\frac{3-\sqrt{5}}{2})^2(x+\frac{3+\sqrt{5}}{2})^2$

r) $(a+1)(a+3)(a+5)(a+7)+15$

C: $(a+2)(a+6)(a+4-\sqrt{6})(a+4+\sqrt{6})$

s) $(a^2+b^2)^3-(b^2+c^2)^3-(a^2-c^2)^3$

C: $3(a^2+b^2)(b^2+c^2)(a-c)(a+c)$

t) $x^4+x^2+\sqrt{2}x+2$

C: $(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+2)$

Harfli İfadelerle İlgili İşlemlerde Bilgisayar Desteği ve Bazı Uygulamaları:

Bir çok matematik problemini, bilgisayarın desteğini alarak kolayca çözebiliriz.

Harfli ifadeleri ya da asal olmayan polinomları çarpanlara ayırmak veya harfli ifadelerin kuvvetlerini hesaplamak için bazı bilgisayar programları vardır.

Bunun için matematik desteği veren uygun bir bilgisayar programı kullanmalıyız. Bu amaca yönelik bir çok program üretilmiştir. Bunlardan başta gelenlerden birisi de **Matlab** programıdır. Matlab'ın kullanımıyla ilgili bilgi edinmek ve çözümlü örneklerini incelemek için, İzmir Fen Lisesi web sayfasının; <http://www.ifl.k12.tr/projedosyalar/dosyalar.htm> bağlantısından **matlab.pdf** dosyasını indirebilirsiniz.

expand ve factor komutları:

Sembolik nesnelere oluşan polinomların kuvvetini açmak için expand komutunu, bir polinomu çarpanlarına ayırmak için factor komutunu kullanırız.

Örnek:

a) $(x^2-x+1)^3 - (x^2+x-1)^3$ açılımının sonucunu;

b)

$-1+3x-3x^2+6x^3+x^4+10x^5-6x^6-10x^7-12x^8+12x^9$ ifadesi bir polinomun kuvveti olduğuna göre hangi polinomun kaçınca kuvveti olduğunu bulduralım.

Çözüm:

a) $y = \text{sym}('(x^2-x+1)^3-(x^2+x-1)^3');$; $\text{pretty}(\text{expand}(y))$
işlemi sonucu ekranda;

$$-6x^5 + 6x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 6x + 2 \text{ görülür.}$$

b) $z = \text{sym}(' -1+3x-3x^2+6x^3+6x^4+x^5+10x^6-6x^7-10x^8+12x^9-12x^{10}+12x^{11}');$; $\text{pretty}(\text{factor}(z))$
işlemi sonucu ekranda;

$$(x-1)^3 (x+1)^3 \text{ görülür.}$$

Örneğin; 2-e) deki

$x^3 - 7x^2 + 7x + 15$ polinomunu matlab programı yardımıyla çarpanlarına ayırılım: Bunun için matlabın komut satırına; aşağıdaki komutları yazalım;

```
>>y=sym('x^3-7*x^2+7*x+15') (Enter)
>>factor(y) (Enter)
```

Ekranda $(x-5)(x-3)(x+1)$ ifadesi görünür. Şayet ifadeyi daha anlaşılır biçimde yazdırmak istersek; $\text{pretty}(\text{factor}(y))$ komutunu kullanmalıyız. Bu durumda ekranda; $(x-5)(x-3)(x+1)$ sonucu görülür.

Not: Aynı işlemi; sadece **$\text{pretty}(\text{factor}(\text{sym}('x^3-7*x^2+7*x+15')))$** komutunu kullanarak ta yapabiliriz.

Örneğin 2-q) deki

$$(a^2+b^2)^3 - (b^2+c^2)^3 - (a^2-c^2)^3$$

ifadesini matlab programı yardımıyla çarpanlarına ayırılım: Bunun için matlabın komut satırına; aşağıdaki komutları yazalım;

```
>>y=sym('(a^2+b^2)^3-(b^2+c^2)^3-(a^2-c^2)^3')
>>pretty(factor(y))
```

veya sadece;

$\text{pretty}(\text{factor}(\text{sym}('(a^2+b^2)^3-(b^2+c^2)^3-(a^2-c^2)^3')))$ yazarsak ekranda;

$$3(b^2+c^2)(a-c)(a+c)(a+b)$$

sonucu görülür.

03. $x^2 - 3xy + 2y^2 + x + 2y + m$ ifadesi birinci dereceden iki çarpana ayrılabilmesi için m kaç olmalıdır? m yi bulduktan sonra çarpanlara ayırınız.

04. $mx^2 - y^2 - 4x + 8y - 15$ ifadesi birinci dereceden iki çarpana ayrılabilmesi için m kaç olmalıdır? m yi bulduktan sonra ifadeyi çarpanlara ayırınız.

05. $x^3 + px + 2$ ifadesinde p kaç olmalıdır ki çarpanlardan birisi tam kare olsun?

06. $12x^3 - 31x^2y + 2xy^2 + 24y^3$ ifadesini çarpanlarından birisi $x-2y$ ise diğer çarpanları bulunuz.

C: $(4x + 3y)(3x - 4y)$

07. $x^8 - 6x^6 - 5x^4 - 6x^2 + 1$ ifadesinin bir çarpanı $x^2 + ax + 1$ olduğuna göre; çarpanlarına ayırınız.

$$C: (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)(x + \frac{3-\sqrt{5}}{2})(x + \frac{3+\sqrt{5}}{2})(x - \frac{3-\sqrt{5}}{2})(x - \frac{3+\sqrt{5}}{2})$$

08. $x^3 + ax^2 - x - 15$ ve $x^3 + bx^2 + 19x + 35$ ifadelerinin ortak çarpanı $x^2 + mx + n$ olduğuna göre; a,b,m,n kaç olmalıdır?

C: a=1, b=9, m=2, n=5

09.

a) $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 5 = 0$ ise x+y kaçtır?

b) $x^2 + y^2 + 4x + 4 = 2xy + 4y$ ise x-y kaçtır?

10. $x + \frac{1}{x} = 3$ olduğuna göre aşağıda istenenleri hesaplayınız.

$$a) x^2 + \frac{1}{x^2} \quad b) x - \frac{1}{x} \quad c) x^3 + \frac{1}{x^3} \quad d) x^4 + \frac{1}{x^4}$$

$$e) \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \quad f) \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \quad g) x\sqrt{x} + \frac{1}{x\sqrt{x}}$$

11.

a) $x > 1$ için $x + \frac{1}{x} = 2\sqrt{3}$ ise $\frac{x^4 - 1}{x^2}$ kaçtır?

b) $x - \frac{1}{x} = 4$ ise $x^4 - 18x^2 + 5$ kaçtır?

c) $x - \frac{1}{x} = 2$ olduğuna göre;

$$x^3 - \frac{1}{x^3} \text{ ve } x^3 + \frac{1}{x^3} \text{ kaçtır?}$$

d) $a^3 + b^3 = a + b = 7$ ise $a^2 + b^2$ kaçtır?

12.

a) a çift bir tam sayı ise $\frac{a^2}{12} + \frac{a^2}{8} + \frac{a^3}{24}$ sayısının tam sayı olduğunu ispat ediniz.

b) $a \in \mathbb{Z}$ ise $\frac{a^5}{120} + \frac{a^4}{12} + \frac{7a^3}{24} + \frac{5a^2}{12} + \frac{a}{5}$ sayısının tam sayı olduğunu ispat ediniz.

13. Aşağıdaki rasyonel ifadelerin basit kesir olup olmadıklarını belirtip; basit kesir değilse basit kesirlere ayırınız.

$$a) \frac{1}{x^2+1} \quad b) \frac{x^3}{x^3+1} \quad c) \frac{1-x}{x^2+x} \quad d) \frac{x+4}{(x^2+2x+1)(x^2+4)}$$

$$d) \frac{x+1}{(x^2+1)(x-1)^2} \quad e) \frac{2x+1}{(x-3)(x+2)(x^2+1)^2} \quad f) \frac{x^5+5}{x^5-x^2}$$

14. a) Her $n \in \mathbb{N}$ için; $\frac{1}{n^2+n} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1}$ olacak biçimde A

ve B sayılarını bulunuz. Bundan faydalanarak;

i) $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{2006.2007}$

ii) $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{n.(n+1)}$

iii) $\frac{1}{1001.1002} + \frac{1}{1002.1003} + \dots + \frac{1}{2006.2007}$ toplamlarını bulunuz.

b) Her $n \in \mathbb{N}$ için; $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{n+2}$ olacak biçimde A, B ve C sayılarını bulunuz. Bundan faydalanarak;

i) $\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \dots + \frac{1}{2006.2007.2008}$

ii) $\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \dots + \frac{1}{n.(n+1).(n+2)}$

iii) $\frac{1}{1001.1002.1003} + \frac{1}{1002.1003.1004} + \dots + \frac{1}{2006.2007.2008}$ toplamlarını bulunuz.

15. $m, n, p \in \mathbb{N}^+$ olmak üzere; $x^{3m+2} + x^{3n+1} + x^{3p}$

ifadesinin çarpanlarından birisinin $x^2 + x + 1$ olduğunu ispat ediniz.

16. a) $x = \sqrt[3]{\sqrt{2}-1} - \sqrt[3]{\sqrt{2}+1}$ ise $x^3 + 3x$ kaçtır?

b) $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 2$ ve $x+y=1$ ise $\sqrt[3]{xy}$ kaçtır?

17. $x - \frac{4}{x} = x^2 + \frac{16}{x^2} - 8$ eşitliğini $A(x).B(x)=0$ biçimine

getirip, bundan faydalanarak denklemi çözünüz.

18. $xy+x+y=5$ ve $x^2y+xy^2=6$ ise $y>1$ olmak üzere x^2+2y^2 değeri kaçtır? (UMO)

19. $\frac{3.1+2}{1.2.3} + \frac{3.2+2}{2.3.4} + \frac{3.3+2}{3.4.5} + \dots + \frac{3.9+2}{9.10.11}$ toplamı kaçtır? (UMO)

20. $x, y, z \in \mathbb{R}$ olmak üzere;

$2x^2 + 5y^2 + 10z^2 - 2xy - 4yz - 6xz + 3$ ifadesinin alabileceği en küçük değer kaçtır? (UMO)

21. $a \neq -1$ olmak üzere, a gerçel sayısı,

$a^5 + 5a^4 + 10a^3 + 3a^2 - 9a - 6 = 0$ eşitliğini sağlıyorsa $(a+1)^3$ kaçtır? (UMO)

22. a, b, c reel sayıları $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ eşitliğini sağlıyorsa $ab+bc+ac$ ifadesinin alabileceği en küçük değer nedir? (UMO)

24.

Aşağıdaki ifadeleri çarpanlara ayırınız.

a) $(a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3$

C: $3(a-b)(b-c)(c-a)$

b) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

C: $(y+x+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz)$

c) $x(y-z)^2 + y(x-z)^2 + z(x-y)^2 + 8xyz$

d) $(x-y)(x+y)^4 + (y-z)(y+z)^4 + (z-x)(z+x)^4$

C: $-(x-y)(y-z)(z-x)(3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 5xy + 5yz + 5zx)$

e) $(a+b+c)^3 - (b+c-a)^3 - (c+a-b)^3 - (a+b-c)^3$

C: $24abc$

f) $a^3(b-c) + b^3(c-a) + c^3(a-b)$

C: $-(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$

g) $a^4(b-c) + b^4(c-a) + c^4(a-b)$

C: $-(a-b)(b-c)(c-a)(a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca)$

h) $a^5(b-c) + b^5(c-a) + c^5(a-b)$

C: $-(a-b)(b-c)(c-a)$

$(a^3 + b^3 + c^3 + a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b + abc)$

i) $a^4(b^2 - c^2) + b^4(c^2 - a^2) + c^4(a^2 - b^2)$

C: $-(a+b)(b+c)(c+a)(a-b)(b-c)(c-a)$

j) $(x+y)^5 - x^5 - y^5$

C: $5xy(x+y)(x^2 + xy + y^2)$

k) $(a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3$

C: $3(a+b)(b+c)(c+a)$

l) $2x^2 - 2\sqrt{3}xy - 3xy + 3\sqrt{3}y^2$

m) $ab(a-b) + c(b-c) - ac(1-b)$

C: $(a-b-c)(a-b+c)$